ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ ФИЗИКИ имени Б.И. СТЕПАНОВА
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

На правах рукописи

УДК 530.145.84; 530.121; 514.821; 514.84

ШАЙКОВСКАЯ
Надежда Дмитриевна

МЕТОДЫ КИНЕМАТИКИ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ПРОСТРАНСТВ С КРИВИЗНОЙ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Минск 2024

Научная работа выполнена в Государственном научном учреждении «ИНСТИТУТ ФИЗИКИ имени Б. И. СТЕПАНОВА НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ».

Научный руководитель:	**Курочкин Юрий Андреевич** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» ИНСТИТУТА ФИЗИКИ НАН Беларуси
Официальные оппоненты:	**Горбацевич Александр Константинович** доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики и астрофизики Белорусского государственного университета **Серенкова Инна Александровна** кандидат физико-математических наук, руководитель лаборатории физических исследований Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого
Оппонирующая организация:	Научно-исследовательское учреждение «Институт ядерных проблем» Белорусского государственного университета

Защита состоится «04» октября 2024 г. в 16:30 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.05.02 при ГНУ «ИНСТИТУТ ФИЗИКИ имени Б.И. СТЕПАНОВА НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ» по адресу: Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 68-2,
тел. ученого секретаря совета +375 17 284 15 59, e-mail: vyblyi@gmail.com.
С диссертацией можно ознакомится в Центральной научной библиотеке имени Я. Коласа Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан « » 2024 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук Выблый Ю. П.

ВВЕДЕНИЕ

Неевклидова геометрия используется для описания широкого класса различных физических задач. Отдельно следует упомянуть о применении гиперболической геометрии для решения проблем релятивистской кинематики. Релятивистская кинематика является важнейшей, не зависящей от конкретных моделей, частью физики частиц. В основе релятивистской кинематики лежат свойства симметрии физического пространства-времени. Установление того факта, что пространство релятивистских скоростей есть трехмерное пространство Лобачевского, открыло широкие возможности для развития идей А. П. Котельникова, относящихся к построению теории векторов неевклидового пространства постоянной кривизны, и применению этой теории к различным вопросам физики элементарных частиц. На геометрии Лобачевского релятивистского пространства скоростей основан эффективный метод описания кинематики столкновений элементарных частиц и ядер, который развивался в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ), Федеральном научно-исследовательском центре Института имени И. В. Курчатова (РФ), в Институте физики НАН Беларуси. В Институте физики имени Б. И. Степанова развит новый метод релятивистской кинематики, основанный на связи бикватернионного исчисления с векторной параметризацией Ф. И. Федорова для группы Лоренца и геометрией Лобачевского.

В диссертационной работе в главе 2 демонстрируется использование данного метода для решения задачи о нахождении специальной системы отсчета, а также предлагаются несколько разных способов ее решения на основе моделей плоскости Лобачевского: Пуанкаре-Клейна и Бельтрами-Клейна. Показывается, что, перейдя к рассмотрению расширенного пространства Лобачевского, можно более естественно ввести в теорию частицы, движущиеся со сверхсветовыми скоростями (тахионы). Тахионы – гипотетические частицы, распространяющиеся со скоростью больше скорости света, введенные Дж. Фейнбергом. Возникновение тахионных состояний в теоретических моделях, например, в модели бозонной струны, воспринималась как трудность, попытки преодоления которой послужили стимулом для дальнейшего развития теории. Исследования эффектов, вызванных наличием тахионных состояний в спектре бозонной струны, а также другие спекулятивные теории сверхсветовых частиц продолжают развиваться, как и попытки экспериментального поиска тахионов. В данной работе представлен новый взгляд на тахионы, основанный на релятивистской кинематике в терминах геометрии расширенного импульсного пространства Лобачевского. Такой подход дает возможность взглянуть на проблему существования тахионов с точки зрения, отличной от до сих пор используемой, и найти в общем виде закон преобразования Лоренца к собственной системе отсчета тахиона.

Динамическое описание процесса столкновения частиц в диссертации рассматривается в рамках феноменологического подхода, в котором две нерелятивистские квантовые частицы движутся и взаимодействуют в некотором модельном неевклидовом пространстве. Изучаются особенности такого движения: наличие у системы связанных состояний, некоторые характеристики рассеяния (сечение, эффективный радиус и длина рассеяния). При этом характеристики самого пространства (например, радиус кривизны) входят в теорию в качестве параметров. Глава 3 посвящена трем задачам о низкоэнергетическом рассеянии в пространстве постоянной отрицательной кривизны: на прямоугольной яме, в кулоновском и корнельском потенциалах. В главе 4 рассматривается задача о движении частицы в специальном пространстве Гаусса, кривизна которого знакопеременна, конечна в начале координат и стремится к нулю при большом значении радиальной переменной. Искривление пространства моделирует при этом некоторое взаимодействие.

Целесообразность поиска феноменологических подходов такого типа обусловлена тем, что квантовая хромодинамика, описывающая взаимодействие адронов посредством глюонного поля, хорошо описывает взаимодействие частиц при высоких и низких энергиях, и оставляет в стороне проблемы в области промежуточных энергий, в которой продолжают использовать феноменологические методы.

Кроме того, такие исследования интересны с математической точки зрения как обобщение задач классической и квантовой механики на пространства с кривизной. Квантово-механическая задача атома водорода на трёхмерной сфере была впервые решена Э. Шредингером. Аналогичная задача в гиперболическом пространстве рассматривалась Л. Инфельдом и А. Шильдом. Эти авторы показали, что энергетический спектр атома водорода в пространствах постоянной кривизны имеет вырождение, аналогичное вырождению энергетических уровней в плоском пространстве. Впоследствии было показано, что причина вырождения состоит в наличии дополнительного сохраняющегося оператора, который является аналогом вектора Рунге–Ленца. Этот оператор был найден П. Хиггсом, Г. Лимоном и Ю.А. Курочкиным с В.С. Отчиком для пространства положительной постоянной кривизны и А. А. Богушем, Ю. А. Курочкиным и В. С. Отчиком для гиперболического пространства.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Работа выполнена в рамках научной программы Конвергенция 2025, 2.1.01, подпрограммы «Микромир, плазма и Вселенная», задания 2.1.01, НИР 1 -«Физика частиц и ядерная спектроскопия в широком диапазоне энергий. Обработка новых данных, полученных на современных ускорительных установках и в космических лучах, выработка предложений для новых экспериментальных проектов. Математические методы для моделирования проблем современной физики и астрофизики» и проектов «ATLAS Множественность 22», «ATLAS Множественность 23».

Цель и задачи исследования

Цель диссертационного исследования – развить новые методы кинематики и феноменологический подход к описанию процессов взаимодействий частиц на основе использования пространств с кривизной, применить их к решению новых задач.

В работе были поставлены следующие задачи:

- определить новую специальную систему отсчета для процесса бинарного упругого рассеяния частиц неравных масс, установить ее координаты в импульсном пространстве;
- используя концепцию расширенного импульсного пространства и понятие собственной системы отсчёта для сверхсветовых частиц, найти преобразование Лоренца к собственной системе отсчета тахиона;
- определить длину и радиус рассеяния для квантово-механической частицы в пространстве Лобачевского в случае потенциала сферически симметричной ямы, а также длину рассеяния для случая кулоновского потенциала;
- численными методами исследовать задачу о движении квантово-механической частицы в пространстве Лобачевского в поле с потенциалом корнельского типа; определить энергии связанных состояний и сдвиги фаз для состояний рассеяния; исследовать зависимость длины рассеяния от радиуса кривизны пространства.
- методом ВКБ получить решения для задачи о рассеянии частицы в специальном пространстве Гаусса знакопеременной кривизны; численными методами исследовать зависимость полного сечения от энергии.

Объект и предмет исследования

Объектами исследования являются задачи релятивистской кинематики и нерелятивистской квантовой механики, в которых применяются методы неевклидовой геометрии.

Предметом исследования являются методы релятивистской кинематики, основанные на использовании свойств пространства Лобачевского и феноменологические подходы к описанию взаимодействия частиц на основе свойств искривленных пространств.

Научная новизна

В работе введена новая система отсчета, связанная с процессом бинарного упругого рассеяния частиц неравных масс. Несколькими методами определена скорость данной системы и угол рассеяния частиц в ней.

Получена матрица преобразования Лоренца в импульсном представлении от произвольного 4-импульса сверхсветовой частицы к ее собственной системе отсчета.

Получены выражения для длины и радиуса рассеяния на сферически-симметричной прямоугольной потенциальной яме в пространстве Лобачевского. Получены формулы для полных сечений в приближениях длины и радиуса рассеяния. Показано, что в случае кулоновского потенциала взаимодействия, длина рассеяния в пространстве Лобачевского является конечной величиной.

Численными методами исследована задача о движении частицы в случае потенциала корнельского типа. Найдены энергии связанных состояний и число связанных состояний в зависимости от радиуса кривизны и орбитального квантового числа. Получена зависимость длины рассеяния от радиуса кривизны, из которой следует наличие эффекта Рамзауэра-Таунсенда.

Получены полные квазиклассические решения и определены сдвиги фаз волновых функций для задачи о рассеянии в пространстве Гаусса, переменная кривизна которого моделирует взаимодействие с «рассеивающим центром».

Положения, выносимые на защиту

1. Определение новой системы отсчета, соответствующей точке пересечения геодезических, проведенных через точки в импульсном пространстве Лобачевского, которые отвечают 4-импульсам частиц до и после столкновения в процессе упругого рассеяния двух частиц неравных масс; установление координат специальной системы отсчета в пространстве 4-скоростей.

2. Определение собственной системы отсчёта для сверхсветовых частиц и матрица преобразования Лоренца к этой системе отсчета.

3. Выражения для длин и радиусов рассеяния для квантово-механической частицы, движущейся в пространстве Лобачевского в поле с потенциалом сферически симметричной прямоугольной ямы; выражение для длины рассеяния для случая кулоновского потенциала.

4. Решение задачи о движении квантово-механической частицы в пространстве Лобачевского в поле с потенциалом корнельского типа численными методами; расчет уровней энергий связанных состояний и сдвигов фаз для состояний рассеяния; зависимость длины рассеяния от радиуса кривизны пространства.

5. Решение задачи о рассеянии частицы в специальном пространстве Гаусса в квазиклассическом приближении; зависимость полного сечения рассеяния от энергии, найденная по приближенным сдвигам фаз и с помощью непосредственного численного расчета; согласие обоих результатов друг с другом при достаточно высоких энергиях: стремление сечения к постоянному значению.

Личный вклад соискателя ученой степени

Общее направление исследований диссертационной работы было определено научным руководителем. Конкретные задачи в работе ставились совместно соискателем и научным руководителем, их решение выполнено соискателем самостоятельно. В работах [1], [2] результаты исследования обсуждались с соавторами, а в работе [3] с соавторами обсуждалась постановка задачи и полученные результаты. Все расчеты проведены соискателем самостоятельно. Квантово-механическая задача о рассеянии частицы в пространстве Гаусса [4] поставлена и решена соискателем самостоятельно, с научным руководителем обсуждались результаты.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы были апробированы на следующих конференциях: XXVIII International Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems (Minsk, Belarus, 2021); Молодежь в науке 2021, (Минск, Беларусь); X Международная школа-конференция молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики-2022» (Минск, Беларусь); XXIX International Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems (Minsk, Belarus, 2022); VII Конгресс физиков Беларуси (Минск); доклад-победитель Конкурса работ молодых ученых ИНСТИТУТА ФИЗИКИ НАН Беларуси на соискание премии имени академика Н.А. Борисевича.

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертационного исследования изложены в 10 научных работах, из которых 6 работ опубликованы в рецензируемых республиканских и международных журналах, 4 – в сборниках научных трудов. Общее количество страниц опубликованных материалов – 71 страница. Общий объем составляет 5,18 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертационное исследование написано на русском языке, включает в себя оглавление, введение, общую характеристику работы, четыре главы (включая разделы и подразделы), заключение, библиографический список и приложения. Работа изложена на 102 страницах печатного текста, содержит 2 таблицы, 49 рисунков, 3 приложения. Библиографический список состоит из списка использованных источников, включающего 85 наименования и списка публикаций соискателя, включающего 10 работ.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 является обзорной, в ней изложены основы метода релятивистской кинематики, основанного на связи векторов пространства Лобачевского с бикватернионами. Метод был разработан в Институте физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси Ю. А. Курочкиным. Данный подход используется в главе 2 при решении задачи о специальной системе отсчета. Приведен краткий литературный обзор о свойствах гипотетических частиц, движущихся со сверхсветовыми скоростями и о понятии расширенного пространства Лобачевского. Данное понятие было использовано при рассмотрении преобразований Лоренца на всем пространстве 4-импульсов.

В **главе 2** введена новая система отсчета, связанная с процессом упругого рассеяния двух частиц неравных масс. Она определяется как точка пересечения геодезических линий, проведенных через точки в пространстве Лобачевского, отвечающие 4-импульсам частиц до и после столкновения (рисунок 1).

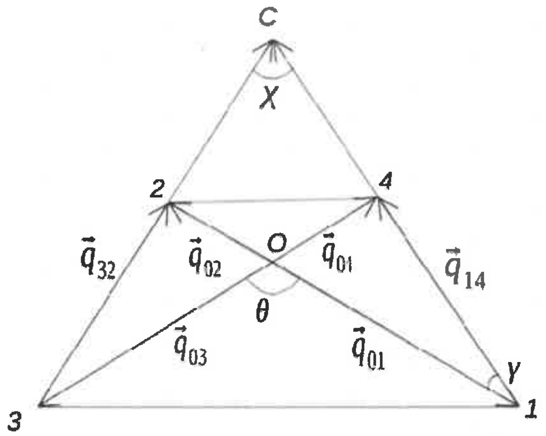


Рисунок 1 – Специальная система отсчета (точка C)

Методом, основанным на связи бикватернионов с векторами пространства Лобачевского, найден угол χ рассеяния частиц в новой системе отсчета [5, с. 315]

$$\cos\chi = \frac{\left(V_1^2+V_2^2\right)\cos\theta + 2V_1V_2 + V_1^2V_2^2\sin^2\theta}{V_1^2+V_2^2+2V_1V_2\cos\theta - V_1^2V_2^2\sin^2\theta}, \tag{1}$$

и модуль скорости данной системы относительно центра масс частиц [7, с. 283]

$$V_{0C} = \frac{2V_1V_2\cos\dfrac{\theta}{2}}{V_1-V_2}. \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) V_1, V_2 – модули скоростей первой и второй частиц в системе их центра масс, θ – угол рассеяния в системе центра масс.

Выражение для угла рассеяния через инварианты Мандельстама

$$\cos\chi = \frac{(s-t)[ts+A]+t\left(m_1^2-m_2^2\right)^2}{(s+t)[ts+A]-t\left(m_1^2-m_2^2\right)^2}, \tag{3}$$

где $A=\left(s-(m_1-m_2)^2\right)\left(s-(m_1+m_2)^2\right)$, $t=-2\vec{p}_1^{\,2}(1-\cos\theta)$, $s=(E_1+E_2)^2$, позволило определить условия существования данной системы отсчета: такая система существует для процессов, в которых [5, с. 316]

$$-\frac{A}{s} \le t \le -\frac{A}{s}+\frac{1}{s}\left(m_1^2-m_2^2\right)^2 \tag{4}$$

Рассматривая вторую пару геодезических линий (рисунок 2), мы получили, что $\cos\chi > 1$ и $\operatorname{ch}\rho_{xy} = \cos\chi$, то есть линии являются расходящимися - точка их пересечения находится в идеальной области пространства Лобачевского [7, с. 284].

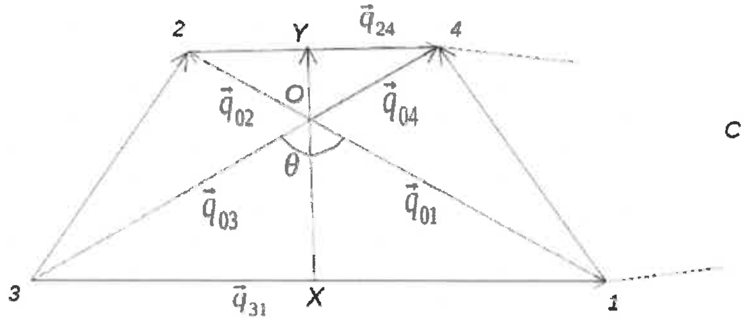


Рисунок 2 – Расходящиеся геодезические

Данная задача была также решена с помощью моделей Пуанкаре и Бельтрами-Клейна для плоскости Лобачевского. Результаты всех трех способов решений совпадают [8].

В модели Пуанкаре на верхней полуплоскости, с введенной на ней комплексными числами, было получено выражение для относительной скорости движения двух частиц через инвариант дробно-линейного отображения

$$V = \frac{I^2-1}{I^2+1}, \tag{5}$$

где $I = I(z_1, \beta, z_2, \alpha)$, точки z_1, β, z_2, α показаны на рисунке 3.

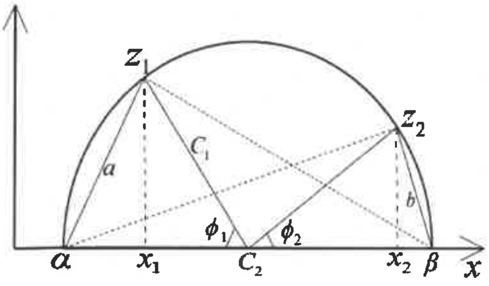


Рисунок 3 – Геодезическая линия в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости

Проверено, что (5) приводит к правильному выражению для относительной скорости двух частиц

$$V_{12}^2 = \frac{\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)^2 - \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_1\right)^2}{\left(1 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2\right)^2}. \tag{6}$$

Для досветовых частиц имеется собственная система отсчета, в которой рассматриваемая частица покоится. В ней ее 4-импульс равен $p = (\vec{0}, ip_0)$. Для тахиона, как и для фотона, система покоя невозможна. Для сверхсветовых частиц был введен аналог такой системы, которую мы назвали собственной системой тахиона. В ней четырехмерный импульс тахиона равен $p = (\vec{p}, 0)$.

Рассматривая действие преобразований Лоренца на всем пространстве 4-импульсов, была найдена матрица преобразования к собственной системе отсчета тахиона [6, с. 640]

$$L = \frac{1}{\mu^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}\,'}\begin{pmatrix} A & \dfrac{ip_0}{\mu^2}[\mu^2(\vec{p}\,' - \vec{p}) + 2\vec{p}\,'(\vec{p}\cdot\vec{p}\,')] \\ -ip_0(\vec{p} + \vec{p}\,') & \vec{p}^{\,2} + \vec{p}\cdot\vec{p}\,' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $A = \dfrac{1}{\mu^2}[(\mu^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}\,')(\vec{p}\times\vec{p}\,')^{\times} + (\mu^2\vec{p}\cdot\vec{p}\,' + (\vec{p}\cdot\vec{p}\,')^2 - \mu^2 p_0^2) + (\vec{p}\times\vec{p}\,')\circ(\vec{p}\times\vec{p}\,') + p_0^2\vec{p}\,'\circ\vec{p}\,']$,

$p = (\vec{p}, ip_0)$ – начальный 4-импульс тахиона, $p_0^2 = \vec{p}^{\,2} - \mu^2$, $p' = (\vec{p}\,', 0)$ – 4-импульс тахиона в собственной системе отсчета, $\vec{p}\,'^2 = \mu^2$; здесь использованы обозначения: $(\vec{p}\times\vec{p}\,')^{\times}$ – матрица векторного произведения, $\vec{p}\,'\circ\vec{p}\,'$ – матрица диада.

Данная матрица по построению является матрицей группы $SO(3.1)$, и удовлетворяет условиям $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ и $\vec{a}\cdot\vec{p} = 0$ (векторный параметр преобразования есть $\vec{q}_L = \vec{a} + i\vec{b}$).

Поскольку $\mu^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}\,' \geq 0$ и $\vec{p}^{\,2} = p_0^2 + \mu^2$, то $k = \dfrac{\vec{p}^{\,2} + \vec{p}\cdot\vec{p}\,'}{\mu^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}\,'} > 1$. Следовательно, полученная нами матрица обладает свойством ортохронности: она не изменяет знак у временной компоненты времениподобного вектора.

В **главе 3** рассмотрены задачи о низкоэнергетическом рассеянии в пространстве Лобачевского в случаях потенциалов: прямоугольной ямы конечной глубины, кулоновского, корнельского. Уравнение Шредингера для стационарных состояний в рассматриваемом пространстве имеет вид

$$H\psi = E\psi, \quad \text{где} \quad H = -\frac{1}{2m}\Delta_{BL} + U,$$

где оператор Бельтрами-Лапласа равен

$$\Delta_{BL} = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sh}^2\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{sh}^2\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \Delta_{\theta,\varphi}\right], \quad \Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

где ρ - радиус кривизны пространства.

В случае потенциала сферически-симметричной прямоугольной ямы

$$U = -U_0, \quad \beta \le a; \qquad U = 0, \quad \beta > a$$

решения уравнения Шредингера для радиальной составляющей волновой функции при $l = 0$ имеют вид [2, с. 249]:

в области $\beta \le a$: $R_1(\beta) = A\dfrac{\sin(\eta_1\beta)}{\operatorname{sh}\beta}$, где $\eta_1 = \sqrt{2m\rho^2(E+U_0)-1}$;

в области $\beta > a$: $R_2(\beta) = \dfrac{\sin(\eta_2\beta)}{\eta_2\operatorname{sh}\beta} + \dfrac{f_0}{\rho\operatorname{sh}\beta}e^{i\eta_2\beta}$, где $\eta_2 = \sqrt{2m\rho^2 E - 1}$.

Из условий непрерывности на границе двух областей, была определена амплитуда рассеяния

$$f_0 = \frac{\rho e^{-i\eta_2 a}\left(\eta_1\cos(\eta_1 a)\sin(\eta_2 a) - \eta_2\cos(\eta_2 a)\sin(\eta_1 a)\right)}{\eta_2\left(i\eta_2\sin(\eta_1 a) - \eta_1\cos(\eta_1 a)\right)}. \tag{8}$$

В случае низкой энергии, процесс рассеяния характеризуется двумя величинами: длиной и радиусом рассеяния. По аналогии с тем, как данные величины вводятся в плоском пространстве, мы определяем их через коэффициенты разложения функции $\dfrac{\eta_2}{\rho}\operatorname{ctg}\delta_0$ в ряд по степеням $\dfrac{\eta_2}{\rho}$:

$$\frac{\eta_2}{\rho}\operatorname{ctg}\delta_0 = a_0 + a_1\frac{\eta_2}{\rho} + a_2\left(\frac{\eta_2}{\rho}\right)^2. \tag{9}$$

Длина рассеяния в пространстве Лобачевского есть

$$L = -\frac{1}{a_0}, \tag{10}$$

а радиус рассеяния

$$r = 2a_2. \tag{11}$$

Учитывая (8), нами были получены следующие выражения для длины и радиуса рассеяния в случае прямоугольной потенциальной ямы в пространстве Лобачевского [2, с. 250]

$$L = a\rho\left(1 - \frac{\mathrm{tg}(a\rho K_0)}{a\rho K_0}\right). \tag{12}$$

$$\frac{r}{2} = \frac{(a\rho)^3}{6L^2}\left(2 - \frac{3}{(a\rho K_0)^2} + 3\frac{\mathrm{tg}(a\rho K_0)}{a\rho K_0}\left(\frac{1}{(a\rho K_0)^2} - 2\right) + 3\frac{\mathrm{tg}^2(a\rho K_0)}{(a\rho K_0)^2}\right). \tag{13}$$

Полученные формулы совпадают с соответствующими формулами для плоского пространства, с точностью до замены a на $a\rho$. Поскольку в пространстве Лобачевского радиус кривизны играет роль единицы измерения длины, то можно сказать, что выражения для длины и радиуса рассеяния в плоском пространстве и в пространстве Лобачевского для данного потенциала одинаковы. Однако, если в плоском пространстве разложение функции $k\,\mathrm{ctg}\,\delta_0$ по степеням k соответствует случаю низкой энергии $E \to 0$, то в пространстве Лобачевского при $\eta_2 \to 0$ энергия частицы стремится не к нулю, а к величине $E_{\min} = 1/(2m\rho^2)$, которую назовем минимальной энергией. При энергии частицы $E < E_{\min}$ ее состояние может быть только связанным.

Сечение упругого рассеяния в приближении длины рассеяния такое же, как и в случае плоского пространства

$$\sigma = 4\pi L^2. \tag{14}$$

В приближении радиуса рассеяния зависимость полного сечения от энергии при $E \to E_{\min} = 1/(2m\rho^2)$ есть

$$\sigma = 4\pi L^2\left(1 + 2mL(r - L)\left(E - \frac{1}{2m\rho^2}\right)\right). \tag{15}$$

В случае кулоновского потенциала, в плоском пространстве длина рассеяния не определена, так как ее предел при $k \to 0$ равен бесконечности. В работе были получены следующие выражения для длины рассеяния в пространстве Лобачевского [1, с. 7]

$L = \sqrt{\dfrac{-\rho}{4\alpha m}}$ - в случае потенциала отталкивания ($\alpha < 0$); (16)

$L = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\rho}{m\alpha}}\dfrac{\Gamma(1-\sqrt{m\alpha\rho})}{\Gamma(1+\sqrt{m\alpha\rho})}$ - в случае потенциала притяжения ($\alpha > 0$). (17)

Таким образом, в пространстве Лобачевского длина рассеяния имеет конечное значение. При переходе к плоскому пределу ($\rho \to \infty$): $L \to \infty$, что согласуется с ситуацией в плоском пространстве.

В **главе 3** также исследовано движение частицы в поле с потенциалом корнельского типа

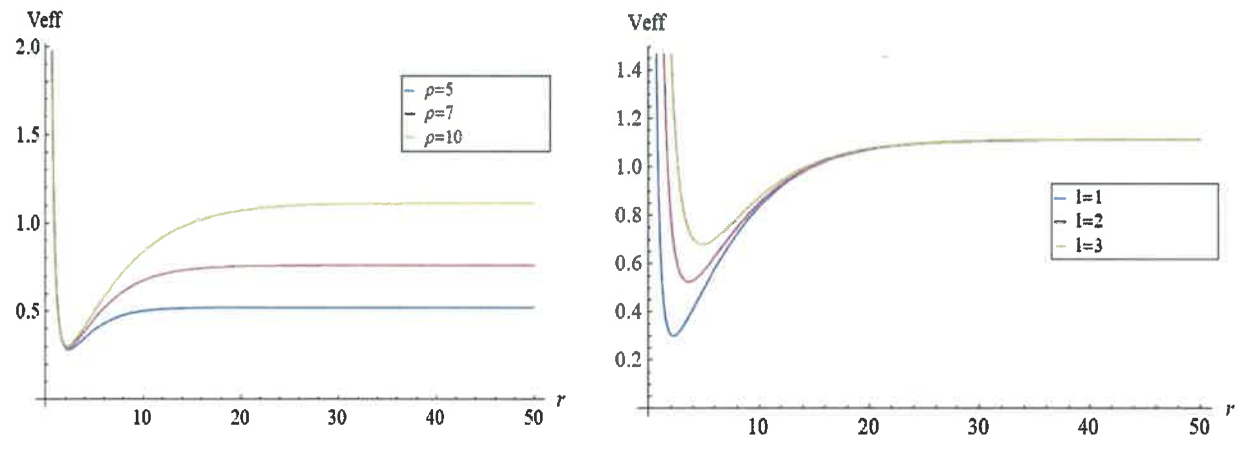
$$V(r) = \frac{a}{\rho}\operatorname{cth}\frac{r}{\rho} + b\rho\operatorname{th}\frac{r}{\rho}. \tag{18}$$

Отметим, что выбор корнельского потенциала в неевклидовом пространстве неоднозначен. Мы исходили из того, что первый член является фундаментальным решением уравнения Лапласа-Бельтрами в трехмерном пространстве Лобачевского и стремились сохранить симметрию присущую плоскому пределу данного потенциала. После разделения переменных уравнение Шредингера приводится к уравнению [3, с. 3]

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dr^2} + V_{eff}(r)u = \varepsilon u, \tag{19}$$

где $V_{eff}(r) = mV(r) + \frac{l(l+1)}{2\rho^2 \operatorname{sh}^2(r/\rho)} + \frac{1}{2\rho^2}$ - эффективный потенциал, $\varepsilon = mE$. Полная волновая функция частицы выражается через функцию $u(r)$ и сферические гармоники как $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{u(r)}{\operatorname{sh}(r/\rho)} Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

Исследуя данную задачу численными метолами, для параметров были выбраны следующие значения: $a = -0.52$, $b = 0.18$, $m = 0.6$ (используются единицы измерения, в которых $\hbar = c = 1$). На рисунке 4 показаны графики эффективного потенциала при различных значениях радиуса кривизны пространства (для $l = 1$) и при различных значениях орбитального квантового числа (для $\rho = 10$).



А Б

Рисунок 4 – Эффективный потенциал при различных значениях радиуса кривизны пространства (А) и орбитального квантового числа (Б)

Эффективный потенциал представляет собой яму конечной глубины. Глубина потенциальной ямы тем больше, чем больше радиус кривизны пространства Лобачевского и чем меньше квантовое число орбитального момента. На рисунке 5 представлены численные решения уравнения Шредингера для связанных состояний, полученные методом стрельбы, приведены соответствующие им значения энергии [3, с. 5].

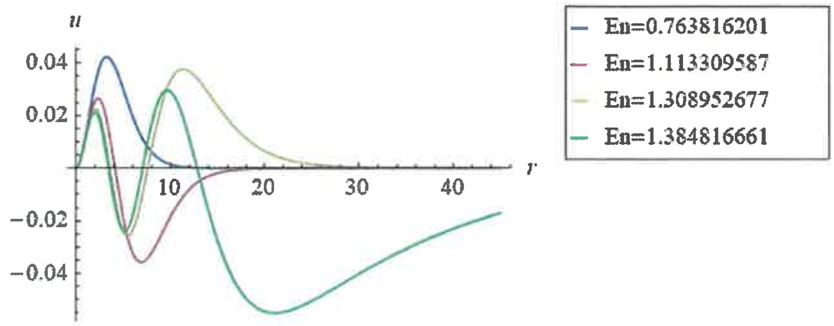


Рисунок 5 – Численные решения и уровни энергии

Для случая низкоэнергетического рассеяния при $l=0$ была получена зависимость длины рассеяния от радиуса кривизны пространства Лобачевского (рисунок 6) [3, с. 8].

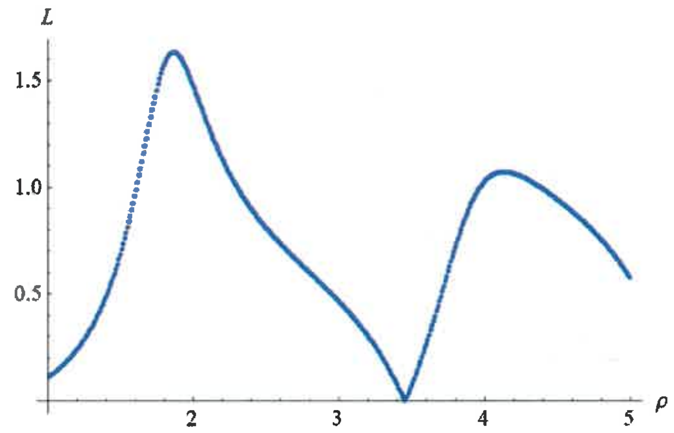


Рисунок 6 – Зависимость длины рассеяния от радиуса кривизны пространства Лобачевского

При определенном значении радиуса кривизны пространства $\rho \approx 3.5$ имеет место эффект Рамзауэра-Таунсенда, то есть отсутствие рассеяния частиц с нулевым угловым моментом при низкой энергии.

Глава 4 посвящена исследованию движения квантово-механической частицы в специальном пространстве Гаусса, знакопеременная кривизна которого моделирует взаимодействие с «рассеивающим центром». Данное пространство реализуется на трехмерной гиперповерхности, заданной уравнением $u = Ae^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}$ (где A и α - параметры) и вложенной в четырехмерное евклидово пространство. Выражение (20) дает зависимость скалярной кривизны пространства от радиальной координаты [9, с. 392]

$$R = \frac{8\alpha^2 A^2 e^{-2\alpha r^2}(3 - 4\alpha r^2 + 4\alpha^2 A^2 r^2 e^{-2\alpha r^2})}{(1 + 4\alpha^2 A^2 r^2 e^{-2\alpha r^2})^2}. \tag{20}$$

На достаточно большом расстоянии от начала координат кривизна пространства стремиться к нулю и пространство становится практически плоским. График зависимости $R(r)$ при параметрах $\alpha = 10^{28}$ м$^{-2}$ и $\alpha A^2 = 1$ показан на рисунке 7.

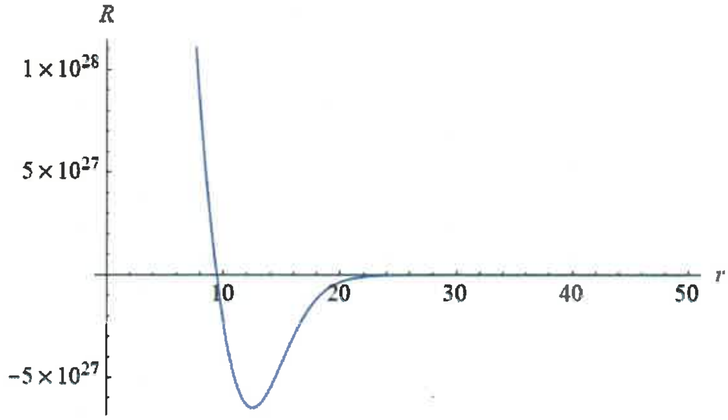


Рисунок 7 – Скалярная кривизна пространства Гаусса в зависимости от расстояния до начала координат

Нами была решена задача о свободном движении частицы в данном пространстве с $\alpha A^2 = 1$ в квазиклассическом приближении. Здесь мы оставили в уравнениях $\hbar$, поскольку в квазиклассическом подходе постоянная Планка играет роль малого параметра. Рассматривался случай больших квантовых чисел орбитального момента l.

Полные решения, полученные методом ВКБ имеют вид [4, с. 41], [10]:

$$R_{x>x_0}(x) = C\frac{\sqrt{u_1}}{x}\left(\frac{2mE}{\alpha} - \frac{l(l+1)}{\eta^2 x^2}\right)^{-1/4}\left(J_{1/3}(u_1) + J_{-1/3}(u_1)\right), \tag{21}$$

$$R_{x<x_0}(x) = C\frac{\sqrt{u_2}}{x}\left(\frac{2mE}{\alpha} - \frac{l(l+1)}{\eta^2 x^2}\right)^{-1/4}\left(-I_{1/3}(u_2) + I_{-1/3}(u_2)\right), \tag{22}$$

где обозначено

$$u_1(x) = \eta\int_{x_0}^{x}\sqrt{Q}dx, \qquad u_2(x) = \eta\int_{x}^{x_0}\sqrt{|Q|}dx, \qquad \eta = 1/\hbar, \qquad K^2 = \frac{2mE}{\alpha\hbar^2},$$

$$Q(x,h) = (1 + 4x^2 e^{-2x^2})\left(\frac{2mE}{\alpha} - \frac{V(x)}{\eta^2}\right), \qquad x = \sqrt{\alpha}r.$$

На рисунке 8 приведен график решения (21), (22).

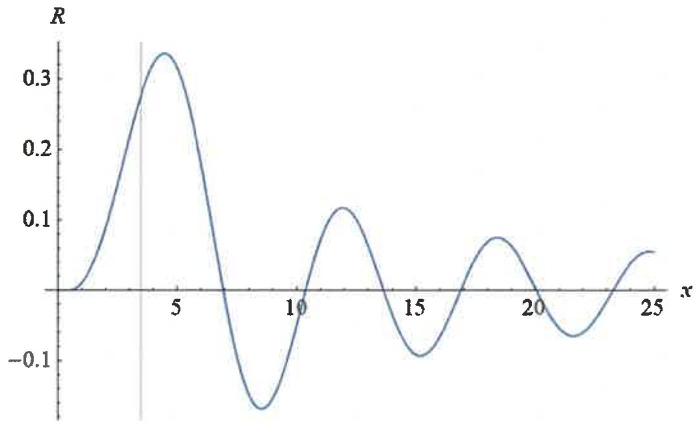


Рисунок 9 – Решение ВКБ (при $K=1, l=3, A=1$)

Решение имеет правильное асимптотическое поведение вблизи начала координат и на удалении от него, а также является непрерывным в точке поворота (где $Q=0$) [4, с. 44].

Из асимптотического поведения (21) при $x \to \infty$, для сдвига фаз волновой функции определено следующее выражение

$$\delta_l = \frac{\pi}{4}(2l+1) + \int_{x_0}^{x} K\sqrt{\left(1+4x^2e^{-2x^2}\right)\left(1-\frac{x_0^2}{x^2}\right)}dx - Kx,$$

которое, при приближенно вычисленном интеграле, принимает вид [4, с. 41]

$$\delta_l = \frac{\pi}{4}(2l+1) + \frac{1}{2}\sqrt{l(l+1)}\left(e^{-2l(l+1)/K^2} - 3\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{8}\left(2\frac{l(l+1)}{K} - K\right)\left(\mathrm{Erf}\left(\frac{\sqrt{2l(l+1)}}{K}\right) - 1\right). \quad (23)$$

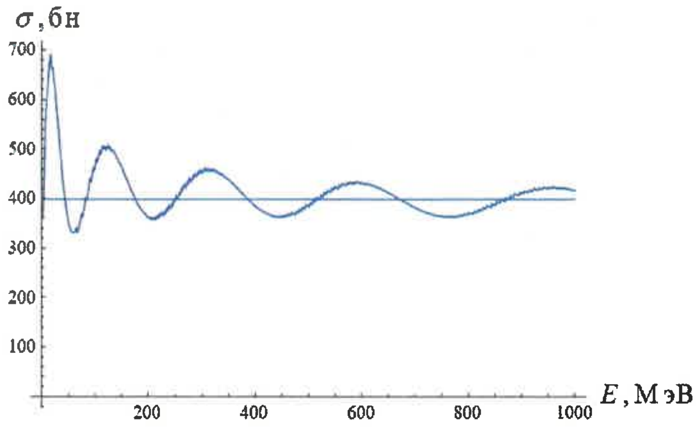


Рисунок 9 – Зависимость полного сечения от энергии, полученная с использованием формулы (23)

На рисунках 9 и 10 показаны зависимости полного сечения от энергии, вычисленные с использованием приближенной формулы для сдвигов фаз и численными методами [4, с. 46].

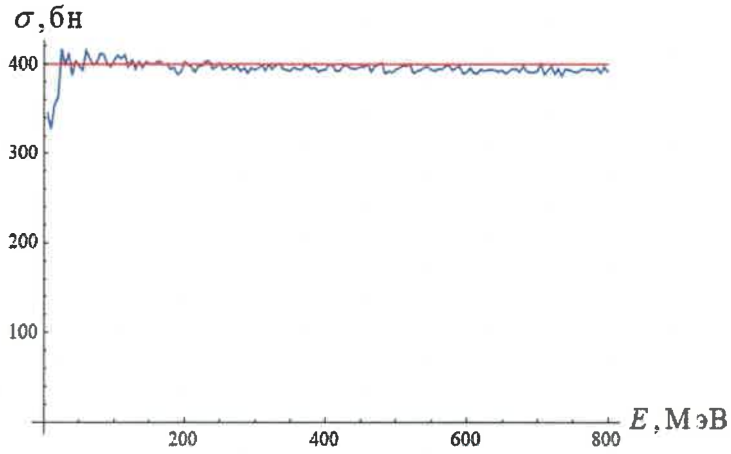


Рисунок 10 – Зависимость полного сечения от энергии, найденная численными методами

С ростом энергии полное сечение, вычисленное по (23), стремится к постоянному значению, примерно равному 400 бн. Сечение, найденное численными методами, стремится к приблизительно такому же значению, достигая его быстрее. Таким образом, для высоких энергий оба результата согласуются друг с другом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации:

1. Введена новая специальная система отсчета, связанная с процессом бинарного упругого рассеяния частиц неравных масс. В рассматриваемой системе отсчета частицы в результате столкновения обмениваются направлениями своего движения. Найдена ее скорость относительно центра масс системы и угол рассеяния частиц в ней. Проанализированы условия ее существования. Представлено несколько методов решения этой задачи, основанных на связи бикватернионов с векторами пространства Лобачевского и на проективных интерпретациях Пуанкаре для плоскости Лобачевского. Найдено выражение для относительной скорости частиц через инвариант дробно-линейного отображения [5, 7, 8].
2. Получена матрица преобразования Лоренца для перехода к собственной системе отсчета сверхсветовой частицы. Найденное преобразование проанализировано с точки зрения его ортохронности [6].
3. Получены выражения для длины и радиуса рассеяния на сферически-симметричной прямоугольной потенциальной яме в пространстве Лобачевского. Найдены формулы для полных сечений в приближении длины рассеяния и в следующем приближении [1, 2].
4. Показано, что в случае кулоновского потенциала взаимодействия, длина рассеяния в пространстве Лобачевского является конечной величиной (тогда как в плоском пространстве она не определена, поскольку стремится к бесконечности при низкой энергии) [1].
5. Численными методами исследована задача о движении частицы поле с потенциалом корнельского типа в пространстве Лобачевского. Определены энергии связанных состояний и сдвиги фаз для задачи рассеяния. Показано, что существуют такие значения радиуса кривизны, при которых длина рассеяния (а, следовательно, и сечение при низкой энергии) равна нулю, то есть имеет место эффект Рамзауэра-Таунсенда [3].
6. Получены квазиклассические решения и определены сдвиги фаз волновых функций для задачи о рассеянии в специальном пространстве Гаусса, переменная кривизна которого моделирует взаимодействие с «рассеивающим центром». Численными методами и на основе приближенно вычисленных сдвигов фаз найдена зависимость полного сечения от энергии. Оба подхода находятся в согласии друг с другом; сечение с ростом энергии стремится к постоянному значению [4, 9, 10].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Методы неевклидовой геометрии могут быть использованы при вычислении инвариантных кинематических характеристик процессов рассеяния частиц. Методы, основанные на связи бикватернионов с векторами пространства Лобачевского и методы с использованием проективных интерпретаций Пуанкаре и Бельтрами-Клейна, позволяют устанавливать связь модулей импульсов и углов между импульсами с их инвариантными образами. Длина и радиус рассеяния, найденные с использованием неевклидового пространства с дополнительным параметром (радиусом кривизны), могут быть использованы при моделировании задач рассеяния на нано-объектах.

Исследование расширенного пространства Лобачевского и преобразования Лоренца к собственной системе отсчета тахиона, как и задача о рассеянии в пространстве Гаусса могут быть использованы в курсах для студентов и аспирантов по специальной теории относительности и применению квазиклассического приближения в квантовой механике.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах:

1. Jenkovszky, L. L. Theory of Quantum Mechanical Scattering in Hyperbolic Space / Y. A. Kurochkin, V. S. Otchik, P. F. Pista, N. D. Shaikovskaya and D. V. Shoukavy // Symmetry. – 2023. – Vol. 15. – P. 377.

2. Kurochkin, Yu. A. Quantum-Mechanical Scattering Problem in Lobachevsky Space at Low Energies / V. S. Otchik, N. D. Shaikovskaya and Dz. V. Shoukavy // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 3. – P. 245–253.

3. Jenkovszky L. L. Nonrelativistic Quantum Mechanical Problem for the Cornell Potential in Lobachevsky Space / Yu. A. Kurochkin, N. D. Shaikovskaya, V. O. Soloviev // Universe. – 2024. – Vol. 10. – P. 76.

4. Kurochkin, Yu. A. Scattering in the Gaussian Space in Semi-Classical Approximation / Yu. A. Kurochkin, N. D. Shaikovskaya // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2024. – Vol. 27, № 1. – P. 37–46.

5. Курочкин, Ю. А. Метод геометрии Лобачевского в релятивистской кинематике столкновения частиц: специальная система отсчета / Ю. А. Курочкин, Н. Д. Шайковская // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 312–317.

6. Kurochkin, Yu. A. Superluminal Particle Motion from the Hyperbolic Momentum Space Point of View / Yu. A. Kurochkin, N. D. Shaikovskaya // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2022. – Vol. 19, № 6. – P. 638–641.

Тезисы докладов:

7. Kurochkin, Yu. A. Lobachevsky geometry method in relativistic kinematics of particle collisions: a special frame of reference / Yu. A. Kurochkin, N. D. Shaikovskaya // Nonlinear Dynamics and Applications. –2021. – Vol. 27. – P. 280 – 286.

8. Специальная система отсчета в модели Пуанкаре пространства Лобачевского / Н. Д. Шайковская // В кн.: Мат. XVIII Международной научной конференции «Молодежь в науке – 2021». Минск, 25-28 октября 2021, С. 202 – 205.

9. Shaikovskaya, N. D. / Free motion of a quantum particle in the Gaussian space // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2022. – Vol. 28. – P. 391–399.

10. Задача о рассеянии в пространстве Гаусса в квазиклассическом приближении / Н. Д. Шайковская // В кн.: Мат. VII Конгресса физиков Беларуси. Минск, 26–28 апреля 2023, С. 61–62.

РЕЗЮМЕ

Шайковская Надежда Дмитриевна

МЕТОДЫ КИНЕМАТИКИ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ПРОСТРАНСТВ С КРИВИЗНОЙ

Ключевые слова: неевклидовая геометрия, расширенное пространство Лобачевского, низкоэнергетическое рассеяние, длина и радиус рассеяния, сечение рассеяния, связанные состояния, квазиклассическое приближение.

Объектами исследования являются задачи релятивистской кинематики и нерелятивистской квантовой механики, в которых применяются методы неевклидовой геометрии.

Предметом исследования являются методы релятивистской кинематики, основанные на использовании свойств пространства Лобачевского и феноменологические подходы к описанию взаимодействия частиц на основе свойств пространств с кривизной.

Цель исследования - развить новые методы кинематики и феноменологический подход к описанию процессов взаимодействий частиц на основе свойств пространств с кривизной. Продемонстрировать его на примерах решения ряда новых задач.

Полученные результаты и их новизна. Введена новая система отсчета, связанная с процессом бинарного упругого рассеяния частиц неравных масс. Получена матрица преобразования Лоренца к собственной системе отсчета сверхсветовой частицы. В пространстве постоянной отрицательной кривизны найдены выражения для длины и радиуса рассеяния на сферически-симметричной прямоугольной потенциальной яме; получены формулы для полных сечений в приближениях длины и радиуса рассеяния; показано, что в случае кулоновского потенциала взаимодействия, длина рассеяния в является конечной величиной; численными методами найдены энергии связанных состояний и парциальные сечения для состояний рассеяния частицы, движущейся в поле потенциала корнельского типа. Получены полные ВКБ решения и определены сдвиги фаз волновых функций для задачи о рассеянии в специальном пространстве Гаусса, переменная кривизна которого моделирует взаимодействие с «рассеивающим центром».

Рекомендации по использованию и область применения. Методы неевклидовой геометрии могут быть использованы при вычислении кинематических характеристик процессов рассеяния частиц. Результаты, полученные при исследовании квантово-механических задач, могут быть использованы при моделировании взаимодействия частиц микромира с помощью искривленных пространств. Они являются примерами обобщения квантово-механических задач на пространства с кривизной.

РЭЗЮМЭ

Шайкоўская Надзея Дзмітрыеўна
МЕТАДЫ КІНЕМАТЫКІ І ФЕНАМЕНАЛАГІЧНЫ ПАДЫХОД ДА АПІСАННЯ ЎЗАЕМАДЗЕЯННЯЎ ЧАСЦІЦ НА АСНОВЕ ЎЛАСЦІВАСЦЯЎ ПРАВСТОРАЎ З КРЫВІЗНАЙ

Ключавыя словы: неэўклідавая геаметрыя, пашыраная прастора Лабачэўскага, нізкаэнергетычнае рассеянне, даўжыня і радыус рассеяння, сячэнне рассеяння, звязаныя станы, квазікласічнае прыбліжэнне.

Аб'ектамі даследавання з'яўляюцца задачы кінематыкі і дынамікі, у якіх прымяняюцца метады неэўклідавай геаметрыі.

Прадметам даследавання з'яўляюцца метады рэлятывісцкай кінематыкі, заснаваныя на выкарыстанні ўласцівасцяў прасторы Лабачэўскага і фенаменалагічныя падыходы да апісання ўзаемадзеяння часціц на аснове асаблівасцяў прастораў с крывізнай.

Мэта даследавання – развіць новыя метады кінематыкі і фенаменалагічны падыход да апісання працэсаў узаемадзеянняў часціц на аснове уласцівасцяў прастораў з крывізнай, прадэманстраваць яго на прыкладах рашэння новых задач.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Уведзена новая сістэма адліку, звязаная з працэсам бінарнага пругкага рассеяння часціц няроўных мас. Атрымана матрыца пераўтварэння Лорэнца да ўласнай сістэмы адліку звышсветлавой часціцы. У прасторы пастаяннай адмоўнай крывізны знойдзеныя выразы для даўжыні і радыусу рассеяння на сферычна-сіметрычнай прамавугольный патэнцыйнай яме; атрыманы формулы для поўных сячэнняў у набліжэннях даўжыні і радыусу рассеяння; паказана, што ў выпадку з кулонаўскім патэнцыялам ўзаемадзеяння, даўжыня рассейвання з'яўляецца канчатковай велічынёй; лікавымі метадамі знойдзены энергіі звязаных станаў і парцыяльныя сячэнні для станаў рассеяння часціцы, якая рухаецца ў поле патэнцыялу карнельскага тыпу. Атрыманы поўныя ВКБ рашэнні і вызначаны зрухі фаз хвалевых функцый для задачы аб рассеянні ў спецыяльнай прасторы Гаўса, пераменная крывізна якога мадэлюе ўзаемадзеянне з «рассейваючым цэнтрам».

Рэкамендацыі па выкарыстанні і вобласць выкарыстання.

Метады неэўклідавай геаметрыі могуць быць выкарыстаны пры вылічэнні кінематычных характарыстык працэсаў рассейвання часціц. Вынікі, атрыманыя пры даследаванні квантава-механічных задач, могуць быць выкарыстаны пры мадэляванні ўзаемадзеяння часціц мікрасвету з дапамогай прастораў с крівізной. Яны з'яўляюцца прыкладамі абагульнення квантава-механічных задач на гэтыя прасторы.

SUMMARY

Shaikovskaya Nadezhda Dmitrievna

KINEMATICAL METHODS AND PHENOMENOLOGICAL APPROACH TO PARTICLE INTERACTIONS DESCRIPTION BASED ON THE PROPERTIES OF SPACES WITH CURVATURE

Keywords: non-Euclidean geometry, extended Lobachevsky space, low-energy scattering, scattering length and radius, scattering cross section, bound states, semi-classical approximation.

The **objects of the research** are problems of relativistic kinematics and non-relativistic quantum mechanics, in which methods of non-Euclidean geometry are used.

The **subject of the research** is methods of relativistic kinematics based on the use of the properties of Lobachevsky space and phenomenological approaches to describing the interaction of particles based on the properties of curved spaces.

The **purpose of the research** is to develop new kinematical methods and a phenomenological approach to describing particle interaction processes based on the properties of spaces with curvature. Demonstrate them using examples of solving a number of new problems.

The results obtained and their novelty. A new reference system is introduced, associated with the process of binary elastic scattering of particles of unequal masses. The Lorentz transformation matrix to the superluminal particle's proper reference frame is obtained. In the space of constant negative curvature, expressions are found for the length and radius of scattering on a spherically symmetric rectangular potential well; formulas for total cross sections in the approximations of scattering length and radius were obtained; it is shown that in the case of a Coulomb interaction potential, the scattering length is a finite quantity; using numerical methods, the energies of bound states and partial cross sections for the scattering states of a particle moving in the field of a Cornell-type potential were found. Complete WKB solutions and phase shifts of wave functions were determined for the problem of scattering in a special Gaussian space, the variable curvature of which models the interaction with the "scattering center".

Recommendations for use and application.

Methods of non-Euclidean geometry can be used in calculating the kinematic characteristics of particle scattering processes. The results obtained in the study of quantum mechanical problems can be used to model the interaction of particles of the microworld using curved spaces. They are examples of generalization of quantum mechanical problems to spaces with curvature.

ШАЙКОВСКАЯ Надежда Дмитриевна

МЕТОДЫ КИНЕМАТИКИ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ПРОСТРАНСТВ С КРИВИЗНОЙ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Подписано в печать « 1 » августа 2024 г. Формат 60 × 90 1/16.
Бумага – офисная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1.4
Учетн. изд. л. 1.2 . Тираж 60 экз. Заказ № 6

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ имени Б. И. СТЕПАНОВА НАН БЕЛАРУСИ,
220072, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 68-2.
Отпечатано на ризографе Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси.