

Государственное научное учреждение
"ИНСТИТУТ ФИЗИКИ имени Б.И. СТЕПАНОВА
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ"

Объект авторского права

УДК 539.12

ОВСИЮК

Елена Михайловна

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦ
С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ
ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Минск 2023

Научная работа выполнена в Государственном научном учреждении
"ИНСТИТУТ ФИЗИКИ имени Б. И. СТЕПАНОВА НАЦИОНАЛЬНОЙ
АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ".

Научный консультант:

Редьков Виктор Михайлович,

доктор физико-математических наук, главный научный
сотрудник Центра "Фундаментальные взаимодействия
и астрофизика" Института физики НАН Беларуси

Официальные оппоненты:

Бояркин Олег Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры общей и медицинской физики
УО "Международный государственный экологический
институт имени А.Д. Сахарова"

Белорусского государственного университета;

Максименко Николай Васильевич,

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры теоретической физики
УО "Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины";

Тихомиров Виктор Васильевич,

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник отраслевой лаборатории
радиационной безопасности Института ядерных проблем
Белорусского государственного университета

Оппонирующая организация: Белорусский государственный университет

Защита состоится 1 декабря 2023 г. в 15 ч. на заседании совета по защите
диссертаций Д 01.05.02 при Институте физики НАН Беларуси по адресу:
220072, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 68-2; тел. 284-15-
59, e-mail: vyblyi@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке
имени Якуба Коласа Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан " 31 " 10 2023 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
кандидат физ.-мат. наук



ВЫБЛЫЙ Ю.П.

ВВЕДЕНИЕ

После создания общей теории относительности геометрические методы являются неотъемлемой частью аппарата теоретической физики. Описание физических явлений зависит от геометрических свойств пространства–времени, на фоне которого они исследуются. В настоящее время наиболее разработанным является подход, при котором элементарные частицы исследуются на фоне заданных геометрий пространства–времени.

Существенным в диссертации является выбор способов обобщения релятивистских волновых уравнений для того, чтобы влияние внешних гравитационных полей учесть геометрически. Соответствующее обобщение уравнений для бозонных полей (например, уравнений Максвелла) обычно проводится посредством формальной замены лоренц-инвариантных тензорных величин на общековариантные; при этом внешне полностью разрушается связь с группой Лоренца. В то же время в 1928–1929 гг. в работах Тетроде, Вейля, Иваненко и Фока был развит способ обобщения уравнений для фермионов со спином $1/2$ на случай псевдоримановых пространств. Это потребовало привлечения тетрадного формализма и существенного использования теории представлений группы Лоренца. Возникшее много лет назад такое фермион-бозонное различие сохраняется в значительной степени и в современной литературе. Однако используется все шире возможность при описании частиц с различными спинами (целыми и полуцелыми) применять единый формализм, основанный на тетрадном подходе и теории группы Лоренца. В большей части диссертации уравнения для частиц с разными спинами формулируются и решаются на основе применения тетрадного формализма.

Еще одна идея является существенной для настоящей работы. Академиком Ф.И. Федоровым с учениками развивалась возможность при исследовании элементарных частиц использовать расширенные наборы представлений группы Лоренца. Этот подход позволяет систематически анализировать возможности описывать, помимо спина, массы и заряда, и другие характеристики элементарных частиц. В диссертации этот подход развивается дальше и, в частности, дополняется исследованием поведения частиц с разными спинами и дополнительными характеристиками во внешних полях (электромагнитных и гравитационных). Учет внешних полей существенен, поскольку дополнительные характеристики частиц (аномальный магнитный момент, электрический дипольный момент, поляризуемость, квадрупольный момент, структура Дарвина – Кокса, внутренний спектр спиновых и массовых состояний) проявляют себя наблюдаемым образом именно во внешних полях.

В диссертации учитываются однородные магнитное и электрическое поля, кулоновское поле. Дополнительно проводится учет неевклидовой геометрии

пространства–времени, которая существенно изменяет описание указанных полей и поведение в них квантово-механических частиц. Примеры неевклидовых геометрий: Лобачевского, Римана, де Ситтера выбраны потому, что они являются важнейшими составными элементами некоторых классических космологических моделей, и в силу их высокой симметрии анализ многих физических систем на фоне этих геометрий можно довести до точных аналитических решений.

Отметим еще одно обстоятельство. Учет дополнительных характеристик элементарных частиц приводит к существенному усложнению описания систем: в частности, возникающие задачи чаще всего приводят к уравнениям со структурой сингулярных точек, более сложной, чем в хорошо изученных случаях. В значительной степени результаты, полученные ранее в классической и квантовой физике с применением теории специальных функций, базируются на классе гипергеометрических функций, решений дифференциального уравнения с тремя особыми точками, или их вырожденном случае. Теория уравнений с более сложной структурой сингулярных точек (типа уравнения Гойна или более сложных) широко используется и развивается в текущей литературе. В частности, большое число новых задач возникло при рассмотрении квантовой теории и классической теории поля на фоне псевдоримановой геометрии пространства–времени. В диссертации рассмотрен ряд задач, приводящих к уравнениям с такой сложной структурой сингулярностей.

В диссертации исследуются частицы со спинами $S = 0, 1/2, 1$ и кратко частицы со спином 2. Где это возможно, анализируются нерелятивистские приближения уравнений. Исследуются задачи, допускающие точные решения или аналитическое описание. Они проясняют общие подходы в теории поля и квантовой механике. Все основные результаты получены с помощью строгих математических методов теоретической физики.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационная работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований "Конвергенция-2020", задание 2.1.01 "Новые математические методы моделирования в классической и квантовой теории поля, физике частиц и астрофизике", НИР "Развитие и применение аппарата функций Гойна к исследованию задач квантовой механики и теории поля" (№ ГР 20160594, рук. Е.М. Овсюк), Государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025", задание 2.1.01 "Теоретические и экспериментальные исследования эффектов фундаментальных взаимодействий в широком интервале энергий и пространственно-временных масштабов",

НИР "Исследование уравнений для частиц высших спинов с дополнительными характеристиками во внешних полях" (№ ГР 20211177, рук. Е.М. Овсиюк), а также в рамках проектов Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований:

проект БРФФИ Ф11М–152 (15.04.2011 – 31.03.2013), "Применения методов римановой и финслеровой геометрий к исследованию 2-мерных микро- и макросистем" (рук. Е.М. Овсиюк);

проект БРФФИ Ф13М–009 (16.04.2013 – 31.03.2015), "Классификация 4-спинов по свойствам их тензорных билинейных форм, применения в поляризационной оптике и теории поля" (рук. Е.М. Овсиюк);

проект БРФФИ Ф13К–079 (16.04.2013 – 31.03.2015), "Эффекты неевклидовой геометрии и топологии в микро- и макросистемах во внешних полях" (рук. В.М. Редьков);

проект БРФФИ Ф14АРМ–021 (23.05.2014 – 31.03.2016), "Развитие и применение аппарата функций Гойна в задачах космологии, электродинамики и квантовой механики" (рук. Л.М. Томильчик);

проект БРФФИ Ф18У–009 (01.06.2018 – 31.03.2020), "Квантовая механика частиц во внешних полях: фермион со спектром масс и векторный бозон" (рук. Е.М. Овсиюк);

проект БРФФИ Ф20РА–007 (04.05.2020 – 31.03.2022), "Применение геометрических методов и термодинамики к описанию гравитационных волн и космологических фазовых переходов" (рук. Е.М. Овсиюк).

Тема диссертации соответствует пункту *12. Междисциплинарные исследования* перечня приоритетных направлений научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы, утвержденного Постановлением Совета Министров Республики Беларусь № 190 от 12 марта 2015 г., и пункту *1. Цифровые информационно-коммуникационные и междисциплинарные технологии, основанные на них производства: физика фундаментальных взаимодействий микро- и макромира, зарождающиеся технологии (квантовые, когнитивные, нейроцифровые, антропоморфные)* перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы, утвержденного Указом Президента Республики Беларусь № 156 от 7 мая 2020 г.

Диссертация соответствует пунктам "Квантовая механика", "Математические методы теоретической физики" паспорта специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является:

развитие теории элементарных частиц на основе использования расширенных наборов представлений группы Лоренца; построение точных решений уравнений в неевклидовых пространствах (Лобачевского, Римана, де Ситтера) с учетом внешних электромагнитных полей и дополнительных внутренних характеристик: поляризуемости, аномального магнитного момента, электрического дипольного момента, электрического квадрупольного момента, структуры Дарвина – Кокса, внутреннего спектра спиновых и массовых состояний.

В связи с этим в диссертации ставятся следующие задачи.

1. Развить теорию частицы со спином $1/2$ и двумя (тремя) массовыми параметрами; обобщить формализм Петраша для частицы со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом на P -асимметричный случай, описывающий частицу с электрическим дипольным моментом; обобщить матричную теорию частицы со спином 2 на риманово пространство.

2. Найти решения уравнения для скалярной частицы с поляризуемостью во внешнем магнитном и кулоновском полях; построить решения уравнения для скалярной частицы со структурой Дарвина – Кокса в магнитном поле, обобщить анализ на случай пространств Лобачевского – Римана; решить уравнение для частицы Дарвина – Кокса во внешнем кулоновском поле.

3. Найти решения уравнения Дирака в магнитном и кулоновском полях на фоне геометрий Лобачевского – Римана; построить решения уравнения Дирака с учетом аномального магнитного момента в магнитном поле; построить решения нерелятивистского уравнения Дирака – Кэлера в моделях Лобачевского – Римана; развить теорию частицы со спином $1/2$ и двумя массовыми параметрами во внешних полях; построить решения уравнения для такой частицы в кулоновском поле.

4. В нерелятивистском приближении найти решения уравнения для векторной частицы на фоне пространств Минковского и Лобачевского – Римана в поле магнитного заряда; построить решения релятивистского уравнения для векторной частицы с аномальным магнитным моментом в магнитном и электрическом полях; развить теорию релятивистской векторной частицы в поле Кулона.

5. В пространстве Лобачевского развить процедуру геометрического моделирования потенциального барьера, отражающего одинаковым образом спинорные и векторные частицы; обобщить анализ эффекта отражения на ос-

циллирующую во времени модель де Ситтера.

6. Развить модель атома водорода в статических моделях де Ситтера; построить нерелятивистские решения уравнения для частицы со спином 1 в нестатических моделях де Ситтера; выполнить геометрическое моделирование смешивания масс трех нейтрино на основе теории частицы с тремя массовыми параметрами.

Объект и предмет исследования

Объект исследования: элементарные частицы с дополнительными характеристиками во внешних электромагнитных полях на фоне пространства–времени с псевдоримановой геометрией.

Предмет исследования: точные решения уравнений для частиц с разными значениями спина и дополнительными характеристиками во внешних полях.

Научная новизна

Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

1. Развита теория частицы со спином $1/2$ и двумя (тремя) массовыми параметрами; формализм Петраша для частицы со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом обобщен на P -асимметричный случай, описывающий частицу с электрическим дипольным моментом; матричная теория Федорова для частицы со спином 2 обобщена на риманово пространство–время.

2. Для скалярной частицы впервые построены решения для следующих физических систем: для частицы с поляризуемостью в магнитном поле; для частицы с поляризуемостью в кулоновском поле; для частицы с внутренней структурой Дарвина – Кокса при наличии магнитного и кулоновского полей, для частицы Дарвина – Кокса в магнитном и электрическом полях на фоне пространства Лобачевского.

3. Для спинорной частицы впервые найдены решения уравнения Паули и Дирака в кулоновском поле на фоне геометрий Лобачевского – Римана; решения уравнения Дирака в поле магнитного заряда в космологических моделях де Ситтера и анти де Ситтера; бозонные решения уравнения Дирака – Кэлера в моделях Лобачевского – Римана; решения уравнения для спинорной частицы с двумя массовыми параметрами во внешнем кулоновском поле.

4. Впервые получены решения уравнения для векторной частицы с аномальным магнитным моментом в магнитном и электрическом полях, решения уравнения для векторной частицы с учетом поля магнитного заряда на фоне пространств постоянной кривизны в нерелятивистском приближении, а также решения для релятивистской векторной частицы в поле Кулона.

5. На основе полученных в диссертации решений для уравнений Шре-

дингера, Дирака, Максвелла и Даффина – Кеммера в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского впервые развита процедура геометрического моделирования потенциального барьера, одинаковым образом отражающего все типы частиц; также установлен эффект космологического отражения для полей со спинами $s = 0, 1/2, 1$; показано, что в условиях осциллирующего во времени пространства де Ситтера эффект нестатичности действует независимо от эффекта отражения.

6. Для атома водорода в статических моделях де Ситтера и анти де Ситтера показана сводимость радиальных уравнений к общему уравнению Гойна; впервые найдены решения нерелятивистского уравнения для векторной частицы в нестатических моделях де Ситтера; предложен метод геометрического моделирования смешивания нейтринных масс в рамках теории фермиона с тремя массовыми параметрами.

В диссертацию включены результаты по новым и ранее не исследованным физическим системам.

Положения, выносимые на защиту

1. Обобщение P -симметричного уравнения Петраша для частицы со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом на P -асимметричный случай для описания электрического дипольного момента; построение матричного уравнения для частицы со спином 2 в римановом пространстве; применение формализма Гельфанда – Яглома для развития теории, которая описывает гипотетическую частицу с тремя массовыми параметрами, и основанный на этом способ моделирования смешивания нейтринных масс за счет неевклидовой геометрии пространства.

2. Нахождение решений уравнения для скалярной частицы с поляризуемостью в магнитном поле и уравнения для скалярной частицы со структурой Дарвина – Кокса в магнитном и кулоновском полях, могущих служить основой для экспериментального измерения поляризуемости и параметра Кокса.

3. Построение волновых функций: для уравнения Дирака в пространствах Лобачевского – Римана в магнитном и кулоновском полях, для уравнения Дирака в поле абелева монополя в пространствах де Ситтера; для уравнения Дирака–Кэлера в пространствах с кривизной, которые могут служить основой для тестирования глобальной структуры пространства. Нахождение волновых функций и спектров энергии для фермиона с двумя массовыми параметрами в кулоновском поле, указывающих на возможность физической интерпретации предложенной модели.

4. Построение решений в классах функций Гойна для нерелятивистской векторной частицы в пространствах Лобачевского – Римана с учетом куло-

новского и осцилляторного полей и решений уравнения для векторной частицы с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью в магнитном и кулоновском полях; нахождение трех классов решений, отвечающих связанным состояниям релятивистской векторной частицы в кулоновском поле.

5. Развитие метода геометрическое моделирование эффективного потенциального поля в уравнениях Максвелла, Дирака и Даффина – Кеммера с использованием квазидекартовых координат в пространстве Лобачевского, барьерный тип этого поля приводит к полному отражению всех типов частиц независимо от их спина и массы; в случае уравнений Максвелла это согласуется с известным подходом к моделированию материальных сред средствами римановой геометрии.

6. Приведение к общему уравнению Гойна радиальных уравнений для моделей атома водорода в пространствах де Ситтера и анти де Ситтера, являющихся соответственно квазистационарной и стабильной квантовомеханическими системами; развитие общеквариантного формализма Майорны – Оппенгеймера в теории электромагнитного поля, что существенно расширяет возможности использования тетрадного формализма в электродинамике Максвелла; применение этого подхода к построению решений уравнений Максвелла в нестатических пространствах де Ситтера.

Личный вклад соискателя ученой степени

По теме диссертации без соавторов опубликованы 10 статей в журналах, издана монография. Соавторами работ по теме диссертации являлись Н.Г. Токаревская, О.В. Веко, Я.А. Войнова, К.В. Казмерчук, А.В. Бурый, Ф.В. Ивашкевич, А.Д. Коральков, В.В. Кисель, Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик, Д.В. Шелковый, А.В. Чичурин, В.А. Плетюхов, В.В. Гилевский, Г.Г. Крылов, Ю.А. Ситенко, Н.Д. Власий, А.М. Ишханян, А.М. Манукян, В. Балан, М. Неагу, А. Оана, В.М. Редьков. Личный вклад Е.М. Овсюк в получение результатов и положений, выносимых на защиту, является определяющим.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- International Conference of young scientist and post-graduates IEP-2013 (Uzhgorod, 2013);
- Conference of Young Scientists "Problems of theoretical physics" (Kiev, 2013);
- Международный семинар "Нелинейные явления в сложных системах" (Минск, 2012–2022);
- Международная школа "Foundation & Advances in Nonlinear Science" (Минск, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020);

- Международный семинар "Nonlinear Phenomenology Advances" (Санкт-Петербург, 2013, 2015);
- International Conference "Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics" (Cluj-Napoca, Romania, 2010; Uzhgorod, 2012; Minsk, 2015; Kiev, 2019);
- International Conference "Quantum groups and quantum integrable systems" (Kiev, 2013; Prague, 2019; Prague, 2021);
- IV, V, VI Конгрессы физиков Беларуси (Минск, 2013, 2015, 2017);
- II-nd International Congress of Scientists (Moscow, 2018);
- Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники (Москва, 2013, 2014, 2016, 2021);
- IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory (Debrecen, Hungary, 2013);
- International conference in honor of Ya.B. Zeldovich "Subatomic particles, Nucleons, Atoms, Universe: Processes and Structure" (Minsk, 2009, 2014, 2018);
- International scientific conference "Optics of Crystals" (Mozyr, 2014);
- "Computer Algebra Systems in Teaching and Research" (Siedlce, Poland, 2013, 2015, 2019);
- The International Conference "Differential Geometry and Dynamical Systems" (Romania, 2016–2022);
- Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения" (Гродно, 2013, 2018, 2019).

Результаты исследований, вошедшие в диссертацию, внедрены в образовательный процесс УО "Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина" (акты о внедрении результатов НИР в образовательный процесс от 19.05.2011, 19.01.2012, 28.02.2013, 28.12.2018).

Опубликование результатов диссертации

По теме диссертации опубликованы 88 статей в рецензируемых республиканских и зарубежных журналах (без соавторов 10), 29 статей в трудах республиканских и международных конференций, 11 тезисов докладов; изданы 8 монографий (одна без соавторов) и 4 отдельные главы в книгах. Общий объем статей в журналах составляет 800 стр. (35 а. л.).

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа включает в себя оглавление, введение, общую характеристику работы, шесть глав, заключение и библиографический список. Общий объем диссертации составляет 263 страницы, объем без учета рисунков, таблиц и библиографии – 217 страниц. Список используемых источников включает 285 наименований.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В главе 1 приведены необходимые сведения об уравнениях для частиц с различными спинами с учетом дополнительных характеристик. Рассмотрены уравнения скалярных и векторных частиц с поляризуемостью (уравнения Плетюхова – Федорова для поля со спином $S = 0$); скалярная частица со структурой Дарвина – Кокса, которая учитывает распределение электрического заряда частицы по конечному объему; модель Петраша для частицы со спином $S = 1/2$ и аномальным магнитным моментом; теория Шамали – Капри для частицы со спином $S = 1$ и аномальным магнитным моментом, а также теория частицы с электрическим квадрупольным моментом; частица с двумя значениями спина $S = 0, 1$ и разными внутренними четностями (уравнение Дирака – Кэлера); частица со спином $S = 1/2$ и двумя (тремя) массовыми параметрами; спинорная частица с электрическим дипольным моментом, с одним и тремя массовыми параметрами (P -неинвариантная теория); уравнение Федорова для поля со спином 2.

В этой главе получены следующие новые результаты:

развита теория частицы со спином $1/2$ и двумя (тремя) массовыми параметрами; учтены электромагнитные поля и псевдориманова структура пространства–времени; уравнение Петраша для частицы с аномальным магнитным моментом обобщено на P -асимметричный случай, описывающий частицу с электрическим дипольным моментом; на основе тетрадного формализма развита матричная формулировка уравнения Федорова для частицы со спином 2 в пространстве–времени с псевдоримановой структурой.

В главе 2 получены следующие новые результаты.

Найдены решения 15-компонентной системы тензорных уравнений для скалярной частицы с поляризуемостью во внешнем магнитном поле, найден обобщенный спектр энергии (σ – параметр поляризуемости)

$$\frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} = \frac{P^2}{\hbar^2} + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} = 4 \frac{eB}{2\hbar} \left(N + \frac{|m| + m + 1}{2} \right) \pm |\sigma| \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^2}. \quad (1)$$

В случае кулоновского поля система уравнений для скалярной частицы с поляризуемостью приводится к дважды вырожденному уравнению Гойна, с использованием условия трансцендентности решений¹ спектр энергии найти не удается.

¹В простых и хорошо изученных случаях, когда решения уравнений строятся в терминах гипергеометрических функций и степенные ряды описываются 2-членными рекуррентными соотношениями, условие обрыва ряда до полинома сводится к единственному ограничению, которое выступает в качестве правила квантования. В случае же, когда возникают ряды с более сложным характером зацеплений коэффициентов ряда, известен полный набор условий, обеспечивающих полиномиальность решений. Существует более слабое требование – условие трансцендентности (это одно из полного набора условий полиномиаль-

Для скалярной частицы с внутренней структурой Кокса из 20-компонентной релятивистской системы тензорных уравнений выведено нерелятивистское уравнение; построены решения этого уравнения в однородном магнитном поле в пространстве Минковского, найден обобщенный спектр энергии

$$E = \frac{p^2}{2M} + \frac{\omega\hbar}{1 - (\Gamma B)^2} \left(n + \frac{m + |m| + 1}{2} \right) - \frac{\omega\hbar}{1 - (\Gamma B)^2} \frac{\Gamma B}{2}, \quad \omega = eB/Mc; \quad (2)$$

при ненулевом параметре Кокса $\Gamma \neq 0$ частота эффективного квантового осциллятора меняется.

Обобщенное уравнение Шредингера для частицы Кокса исследовано в пространстве Лобачевского с учетом модифицированного этой геометрией магнитного поля; параметр Кокса входит только в уравнение по координате z вдоль магнитного поля, возникает уравнение с потенциалом барьерного типа

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \epsilon - 1 - U(z) \right] f(z) = 0, \quad U(z) = -\frac{b\gamma - \Lambda \operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{ch}^4 z - \gamma^2}, \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad (3)$$

правило квантования параметра $\Lambda > 0$ известно из анализа уравнения по переменной r ; параметр γ соотносится с внутренней структурой частицы Кокса, он предполагается малым. Построены решения этого уравнения с 7-членными рекуррентными соотношениями для коэффициентов степенного ряда; на основе этих решений выполнен численный анализ возникающего туннельного эффекта.

Исследовано аналогичное уравнение в сферическом пространстве Римана:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \epsilon + 1 - U(z) \right] f(z) = 0, \quad U(z) = \frac{b\gamma + \Lambda \cos^2 z}{\cos^4 z - \gamma^2}, \quad z \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right), \quad (4)$$

решения уравнения сводятся к степенным рядам с 7-членными рекуррентными соотношениями; показана возможность получения спектров энергии на основе использования полиномиальных приближений для степенных рядов, при этом число уровней энергии увеличивается с ростом порядка полиномов.

Построены решения релятивистского уравнения Кокса в кулоновском поле; спектр энергии найден на основе использования трансцендентных решений Фробениуса возникающего радиального уравнения с 4-мя регулярными

ности). Чаще всего удовлетворить всем условиям полиномиальности невозможно. Следует заметить, что существует достаточно много ситуаций, когда решения уравнений можно строить либо, например, в функциях Гойна, либо после некоторых дополнительных преобразований, позволяющих убрать из уравнений одну особую точку, свести задачу к анализу уравнения гипергеометрического типа. При этом, условие трансценденности всегда приводит к тем же спектрам энергии, которые находятся при анализе в гипергеометрических функциях.

особыми точками и 2 нерегулярными точками ранга 2, для уровней энергии выведено алгебраическое уравнение 4-го порядка, которое решается численно; полученный спектр энергий интерпретируется физически и модифицирует известный спектр для обычной скалярной частицы.

В главе 3 получены следующие основные результаты.

В пространствах Лобачевского и Римана построены решения уравнения Дирака в обобщенном магнитном поле

$$\left[i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\operatorname{ch} r - 1)}{\operatorname{sh} r} + \operatorname{ch} z (i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M) \right] \psi = 0. \quad (5)$$

Число энергетических уровней в пространстве Лобачевского конечно, в пространстве Римана спектр энергии полностью дискретный; в обоих случаях спектры энергий существенно меняются.

В пространстве Минковского найдены решения уравнения для частицы со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле. После разделения переменных задача приводится к дифференциальному уравнению 4-го порядка по переменной r , для его решения используется метод факторизации, после чего возникающие два уравнения 2-го порядка решаются в гипергеометрических функциях. Найдены обобщенные спектры энергии.

Рассмотрен случай электрически нейтральной частицы с магнитным моментом (нейтрон). Решения для основной переменной выражаются через функции Бесселя (параметр Γ связан с магнитным моментом):

$$\begin{aligned} f(r) &= \sqrt{r} (J_{m+1/2}(x) + Y_{m+1/2}(x)), \quad x = \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 - k^2} + \Gamma)^2 - M^2} r; \\ g(r) &= \sqrt{r} (J_{m+1/2}(y) + Y_{m+1/2}(y)), \quad y = \sqrt{(\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - \Gamma)^2 - M^2} r; \end{aligned} \quad (6)$$

решения выглядят как решения с цилиндрической симметрией для обычной свободной частицы со спином $1/2$, но с модификацией из-за ненулевого магнитного момента:

$$\epsilon^2 - M^2 \implies (\sqrt{\epsilon^2 - k^2} \pm \Gamma)^2 - M^2, \quad \Gamma = \lambda \frac{e B \hbar}{\hbar c m c}. \quad (7)$$

Главным проявлением наличия аномального магнитного момента нейтральной частицы является пространственное масштабирование волновых функций в поперечных магнитному полю направлениях. По-видимому, такая модификация поперечной структуры нейтронного пучка может наблюдаться экспериментально, например, в нейтронных бесселевых пучках.

P -Неинвариантное уравнение для частицы со спином $1/2$ решено во внешнем магнитном поле:

$$\left[i\gamma^0 \partial_0 i\gamma^1 \partial_r + \gamma^2 \left(\frac{i\partial_\phi}{r} + \frac{eBr}{2} \right) + i\gamma^3 \partial_z - i\Gamma\gamma^5 \Sigma_3 + i\gamma^5 M \right] \Psi = 0; \quad (8)$$

после разделения переменных выведены уравнения, совпадающие с полученными для P -инвариантной теории. Спектры энергии оказываются теми же самыми; при этом структура волновых функций несколько отличается от имеющейся для обычной P -симметричной частицы.

Неинвариантное относительно пространственного отражения уравнение для частицы со спином $1/2$ решено в кулоновском поле. Задача приводится к уравнению с 3 особыми точками, двумя регулярными и одной нерегулярной:

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - i\nu} \right) \frac{df_1}{dx} + \left(\frac{2E\alpha - \gamma - iE}{x} - \frac{\Gamma^2}{x^2} + E^2 - 1 + \frac{\gamma + iE}{x - i\nu} \right) f_1 = 0,$$

$$x = Mr, \quad E = \epsilon/M, \quad \Gamma^2 = (j + 1/2)^2 - \alpha^2, \quad \gamma = \alpha/(j + 1/2).$$

Его решения построены в функциях Гойна; для получения правила квантования используется условие трансцендентности; найденный спектр энергии совпадает со спектром обычной дираковской частицы.

В пространствах Лобачевского и Римана исследовано нерелятивистское уравнение для частицы со спином $1/2$ с учетом внешнего кулоновского поля; задача приводится к общему уравнению Гойна с 4 регулярными особыми точками; для получения правила квантования используется условие трансцендентности, получены две серии уровней энергии. Приводим спектры только для случая сферического пространства:

$$E = -\frac{e^2}{2(n + j + 1)^2} + \frac{(n + j + 1)^2}{2}, \quad E = -\frac{e^2}{2(n + j)^2} + \frac{(n + j)^2}{2}. \quad (9)$$

В пространствах Лобачевского H_3 и Римана S_3 построены решения уравнения Дирака при учете кулоновского поля, спектры энергии найдены из условия трансцендентности для решений радиальных уравнений с 6 регулярными особыми точками. В пространствах Лобачевского спектр имеет вид

$$H_3, \quad E = m \sqrt{\frac{1 - (e^2 + N^2)/m^2}{1 + \frac{e^2}{N^2}}}, \quad N = \frac{n}{2} + \sqrt{\nu^2 - e^2}; \quad (10)$$

выражение под корнем в (10) должно быть положительным:

$$1 > \frac{e^2 + N^2}{m^2} \implies (e^2 + N^2) \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 \rho^2} < 1; \quad (11)$$

это приводит к конечности числа дискретных уровней. Исследован вопрос о возможности получить решения с этим спектром на основе использования полиномов вместо степенных рядов. Для этого анализируется рекуррентная формула для коэффициентов степенного ряда

$$S_{k-3}d_{k-3} + S_{k-2}d_{k-2} + S_{k-1}d_{k-1} + S_k d_k + S_{k+1}d_{k+1} = 0.$$

Условие трансцендентности $S_{k-3} = 0$ приводит к спектру (10). Если дополнительно выполняются еще три равенства, то в силу рекуррентных формул ряд оборвется до полиномов.

$$d_{k-2} = 0, \quad d_{k-1}, \quad d_k = 0 \quad \implies \quad d_{k+1} = 0, \quad d_{k+2} = 0, \dots \quad (12)$$

Показано с использованием численных методов, что при следующих из условия трансцендентности значениях энергии удовлетворить условиям (12) невозможно.

Аналогичная система исследована в сферическом пространстве Римана, спектр энергии полностью дискретный

$$S_3, \quad E = m \sqrt{\frac{1(e^2 + N^2)/m^2}{1 + \frac{e^2}{N^2}}}, \quad N = \frac{n}{2} + \sqrt{\nu^2 - e^2}. \quad (13)$$

Численный анализ построенных решений указывает на квадратичную интегрируемость найденных решений.

В пространствах Лобачевского и Римана построены решения уравнения Дирака – Кэлера; после разделения переменных задачи приводятся к уравнениям 4-го порядка, которые решаются с применением метода факторизации, решения найдены в гипергеометрических функциях. В случае пространства Римана спектр дискретный, он не совпадает со спектром дираковской частицы в этом пространстве. В пространстве Лобачевского решения уравнения Дирака–Кэлера также отличаются от решений 4-х уравнений Дирака в этом пространстве. Эти различия обусловлены тем, что уравнение Дирака–Кэлера в любом римановом пространстве не распадается на 4 несвязанных уравнения дираковского вида.

Найдены решения уравнения Дирака в поле магнитного заряда в моделях де Ситтера и анти де Ситтера (соответственно $\Phi = 1 - r^2$ и $\Phi = 1 + r^2$)

$$\left[i \frac{\gamma^0}{\sqrt{\Phi}} \partial_t + i \sqrt{\Phi} \gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta, \phi}^k - M \right] \Psi(x) = 0, \quad (14)$$

$$\Sigma_{\theta, \phi}^k = i \gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i \partial_\phi + (i \sigma^{12} - k) \cos \theta}{\sin \theta}, \quad k = \frac{eg}{\hbar c}. \quad (15)$$

При диагонализации квадрата и третьей проекции полного сохраняющегося момента \vec{J}_k^2, J_3^k , а также оператора Дирака $\hat{K} = -i\gamma^0\gamma^3\Sigma_{\theta,\phi}^k$ решения строятся в виде

$$\Psi_{\epsilon jm}^k = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_1 D_{k-1/2} \\ f_2 D_{k+1/2} \\ \delta f_2 D_{k-1/2} \\ \delta f_1 D_{k+1/2} \end{vmatrix}, \quad \delta = \pm 1, \quad K = i\delta \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - k^2}; \quad (16)$$

$D_\sigma \equiv D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ – функции Вигнера. В пространстве анти де Ситтера спектр энергии оказывается дискретным. Для минимального значения j спектр энергии следующий (M – масса частицы):

$$j = j_{\min} = |k| - 1/2, \quad E_n = \frac{Mc\rho}{\hbar} + 2n - 1/2; \quad (17)$$

решения конечны на бесконечности, если

$$\rho > \frac{1}{2} \frac{\hbar}{Mc} = \frac{1}{2} \lambda_e = 1.213 \times 10^{-12} \text{ м}. \quad (18)$$

Для состояний с большими значениями j спектр энергии такой:

$$E_n = Mc^2 \left[1 + (3/2 + 2n + \sqrt{(j + 1/2)^2 - k^2}) \frac{\lambda_e}{\rho} \right]. \quad (19)$$

Построены решения уравнения для частицы со спином 1/2 и двумя массовыми параметрами во внешнем кулоновском поле. Основная система уравнений для двух биспиноров имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\gamma^0 \left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r} \right) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} - M_1 + i \frac{\beta_1}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \right] \Psi_1 - i \frac{\alpha_1}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_2 &= 0, \\ \left[\gamma^0 \left(i\partial_t - \frac{\alpha}{r} \right) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta\phi} - M_2 - i \frac{\alpha_2}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \right] \Psi_2 + i \frac{\beta_2}{r^2} \gamma^0 \gamma^3 \Psi_1 &= 0, \\ \Sigma_{\theta,\phi} &= i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12} \cos \theta}{\sin \theta}; \end{aligned}$$

параметры определяются в рамках общей теории следующими соотношениями (свободный параметр модели $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -e^2 \frac{1}{3} \frac{(1 - \cos \gamma)(-\cos \gamma \sqrt{12 - 3 \cos^2 \gamma} + \cos^2 \gamma + 2)}{M \cos \gamma (1 + \cos \gamma)}, \\ \alpha_2 &= e^2 \frac{2}{3} \frac{\sin^2 \gamma}{M \cos \gamma}, \quad \beta_1 = -e^2 \frac{2}{3} \frac{\sin^2 \gamma}{M \cos \gamma} < 0, \end{aligned}$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{3} \frac{e^2(1 + \cos \gamma)(\cos \gamma \sqrt{12 - 3 \cos^2 \gamma} + \cos^2 \gamma + 2)}{M \cos \gamma (\cos \gamma - 1)} > 0;$$

Построены решения с квантовыми числами ϵ, j, m :

$$\Psi_1(x) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_1(r)D_{-1/2} \\ f_2(r)D_{+1/2} \\ f_3(r)D_{-1/2} \\ f_4(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}, \quad \Psi_2(x) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r} \begin{vmatrix} g_1(r)D_{-1/2} \\ g_2(r)D_{+1/2} \\ g_3(r)D_{-1/2} \\ g_4(r)D_{+1/2} \end{vmatrix}; \quad (20)$$

$D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ – функции Вигнера; $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$; $m = -j, \dots, +j$. После разделения переменных задача приводится к уравнению 4-го порядка; его решения строятся с использованием степенных рядов с 12-членными рекуррентными соотношениями; спектры энергии найдены в аналитической форме с применением условия трансцендентности, они похожи на спектры для обычных дираковских частиц с разными массами. Учитывая найденные волновые функции и возможность получить спектр энергий, можно сделать вывод о корректности с физической точки зрения основного уравнения для этой модели, несмотря на гипотетический статус такой сложной частицы.

В главе 4 рассматривается векторная частица во внешних полях. Получены следующие результаты.

В пространстве Минковского исследовано нерелятивистское приближение для векторной частицы ($S = 1$) в поле монополя Дирака. Релятивистская волновая функция частицы с квантовыми числами (ϵ, j, m) строится с использованием аппарата функций Вигнера $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$:

$$\Phi_{\epsilon jm}(x) = e^{-i\epsilon t} [f_1(r)D_k, f_2(r)D_{k-1}, f_3(r)D_k, f_4(r)D_{k+1}, f_5(r)D_{k-1}, f_6(r)D_k, f_7(r)D_{k+1}, f_8(r)D_{k-1}, f_9(r)D_k, f_{10}(r)D_{k+1}]. \quad (21)$$

Для j разрешены значения $|k| = 1/2, 1, 3/2, \dots, j = |k| - 1, |k|, \dots$ ($k = \pm 1/2$ – особый случай). Нерелятивистская радиальная система с учетом обозначения

$$\frac{1}{2}r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2EM \right) = \bar{\Delta}$$

представляется так ($c = \frac{1}{2}\sqrt{(j+k)(j-k+1)}, d = \frac{1}{2}\sqrt{(j-k)(j+k+1)}$):

$$\bar{\Delta} \Psi = A \Psi, \quad A = \begin{vmatrix} 2c^2 & \sqrt{2}c & 0 \\ \sqrt{2}c & (c^2 + d^2 + 1) & \sqrt{2}d \\ 0 & \sqrt{2}d & 2d^2 \end{vmatrix}, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{vmatrix}, \quad (22)$$

Преобразованием подобия система приводится к диагональному виду. Дополнительно учтены кулоновский и осцилляторный потенциалы, в обоих случаях найдены три серии уровней энергии:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{L(L+1)}{r^2} \right] f(r) = 0 ,$$

$$L_i = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2A_i} , \quad E_i = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(n + L_i + 1)^2} ; \quad (23)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2\left(E - \frac{kr^2}{2}\right) - \frac{L(L+1)}{r^2} \right] f = 0 ,$$

$$L_i = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2A_i} , \quad E_i = \frac{1}{2} \sqrt{k} \left(\frac{3}{2} + L_i + 2n \right). \quad (24)$$

Выполнен анализ нерелятивистской векторной частицы в пространстве Лобачевского, учтены потенциалы Кулона и осциллятора. После разделения переменных задача приводится к гипергеометрическому уравнению и двум уравнениям Гойна. С использованием обычного условия полиномиальности (в первом случае) и условия трансцендентности функций Гойна (во втором случае) получены формулы для трех серий уровней энергии:

в кулоновском потенциале

$$E_1^{s=1} = -\frac{\alpha^2}{2N_1^2} - \frac{N_1^2}{2}, \quad E_2^{s=1} = -\frac{\alpha^2}{2N_2^2} - \frac{N_2^2}{2},$$

$$E_3^{s=1} = -\frac{\alpha^2}{2N_3^2} - \frac{N_3^2}{2}, \quad E^{s=0} = -\frac{\alpha^2}{2N^2} - \frac{N^2}{2}; \quad (25)$$

в осцилляторном потенциале

$$E_1^{s=1} = N_1 \sqrt{k + 1/4} - \left(N_1^2 + \frac{1}{4}\right), \quad E_2^{s=1} = N_2 \sqrt{k + \frac{1}{4}} - \left(N_2^2 + \frac{1}{4}\right),$$

$$E_3^{s=1} = N_3 \sqrt{k + \frac{1}{4}} - \left(N_3^2 + \frac{1}{4}\right), \quad E^{s=0} = N \sqrt{k + \frac{1}{4}} - \left(N^2 + \frac{1}{4}\right); \quad (26)$$

для сравнения приведены формулы спектров энергии $E^{s=0}$ для скалярной частицы в этих потенциалах.

В пространстве Минковского обобщенное уравнение Даффина – Кеммера для векторной частицы с аномальным магнитным моментом решено во внешних магнитном и электрическом полях; рассмотрены случаи заряженной и нейтральной частиц; аналогичные решения найдены для частицы с электрическим квадрупольным моментом.

В пространстве Минковского построены решения уравнения для векторной частицы в магнитном поле, приведем общую структуру спектров энергии:

$$\begin{aligned}\epsilon_1^2 &= M^2 + k^2 + \lambda^2 + \lambda_1, & \epsilon_2^2 &= M^2 + k^2 + \lambda^2 + \lambda_2, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{\beta(1 + \gamma) \pm \sqrt{\beta^2(1 - \gamma)^2 + 16B^2\rho\gamma}}{2}, \\ \gamma &= \frac{\epsilon^2 - k^2}{M^2}, & \beta &= \sigma \frac{4B^2}{M^2}, & \rho &= 1 - \frac{4B^2\sigma^2}{M^4};\end{aligned}\quad (27)$$

обозначения для параметров приведены в диссертации. Существует третий класс решений с простым спектром $\epsilon^2 = M^2 + k^2 + \lambda^2$, где поляризуемость никак себя не проявляет.

В пространстве Минковского выполнен анализ системы из 6 радиальных уравнений, описывающей векторную частицу в кулоновском поле в состояниях с четностью $P = (-1)^j$. С учетом обобщенного условия Лоренца показано, что одна функция из 6 обязана обращаться в нуль; следовательно, имеем систему из 6 уравнений для 5 неизвестных функций. В качестве независимой можно выбирать любую функцию из пяти, в результате для этой функции получаем два разных дифференциальных уравнения 2-го порядка, которые можно связывать с двумя подклассами состояний частицы с четностью $P = (-1)^j$. Эти независимые уравнения 2-го порядка найдены, построены их решения Фробениуса. Для получения правила квантования используется условие трансцендентности решений Фробениуса. Для обоих уравнений оно дает разумные формулы для спектров энергии, причем они различаются между собой. Численный анализ поведения построенных решений указывает на их квадратичную интегрируемость.

В главе 5 развит метод геометрического моделирования силовых полей для частиц с разными спинами. Основные результаты сводятся к следующему.

Найдены решения уравнений Максвелла в матричной форме Майораны – Оппенгеймера в виде обобщенных плоских волн в пространстве Лобачевского

$$\begin{aligned}dS^2 &= dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \\ \Psi \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} &= e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(z) \end{vmatrix}, \\ (-i\partial_t + \alpha^1 e^z \partial_x + \alpha^2 e^z \partial_y + \alpha^3 \partial_z - \alpha^1 S_2 + \alpha^2 S_1) \Psi &= 0,\end{aligned}\quad (28)$$

явный вид матриц α^i и спиновых матриц S_1, S_2 приведен в диссертации. Выведенное уравнение для основной функции

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 - (k_1^2 + k_2^2)e^{2z} \right] G = 0 \quad (29)$$

можно рассматривать как уравнение шредингеровского типа с потенциальной функцией барьерного типа $U(z) = (k_1^2 + k_2^2)e^{2z}$; при $k_1 = 0, k_2 = 0$ этот барьер исчезает. В квантово-механическом контексте частица должна отражаться от такого барьера, не проникая за него. Аналогичный эффект имеет место и для электромагнитного поля: геометрия Лобачевского действует как эффективная материальная среда со свойствами идеального зеркала. Уравнение $\omega^2 - U(z) = 0$ определяет критическую точку z_0 , правее которой решение должно быстро спадать до нуля (приводим выражение в обычных единицах):

$$z_0 = \rho \ln \frac{\omega}{c \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad (30)$$

где ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского. Помимо космологических аспектов, эти решения представляют интерес в контексте геометрического моделирования материальных сред со специальными свойствами.

Аналогичный анализ выполнен для шредингеровской и дираковской частиц. Анализ также распространен на случай осциллирующей модели де Ситтера:

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t [e^{-2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2], \quad \Psi = e^{ik_1x} e^{ik_2y} \psi(t, z), \quad (31)$$

$$\left(i\gamma^0 \cos t \partial_t + i\gamma^1 e^z \partial_x + i\gamma^2 e^z \partial_y + i\gamma^3 \partial_z - M \cos t \right) \psi = 0;$$

вывод об отражении частиц от барьера остается справедливым и здесь.

В пространстве Лобачевского на основе использования квазидекартовой системы координат (28) построены решения уравнения Даффина – Кеммера для массивной векторной частицы

$$\left[i\beta^0 \partial_t + i\beta^1 e^z \partial_x + i\beta^2 e^z \partial_y + i(\beta^3 \partial_z - \beta^1 J^{31} + \beta^2 J^{23}) - M \right] \Psi = 0, \quad (32)$$

$$\Psi(t, x, y, z) = e^{-iet} e^{iax} e^{iby} \{ \Phi_0(z), \Phi_j(z), E_j(z), H_j(z) \};$$

при этом учитывается диагонализация обобщенного оператора спиральности:

$$\left[ae^z S^1 + be^z S^2 - iS^3 \frac{d}{dz} - 1 \right] \Psi(z) = \sigma \Psi(z), \quad \sigma = -1, 0, +1. \quad (33)$$

Вывод об отражении частиц от барьера остается справедливым и здесь.

Выполненный в этой главе анализ обобщает известную возможность моделировать некоторые специальные материальные среды в электродинамике средствами римановой геометрии. Кроме того, поскольку такой эффект отражения не возникает при использовании других систем координат в пространстве Лобачевского, это указывает на то, несмотря на общую ковариантность геометрического подхода в рамках общей теории относительности,

выбор систем координат является значимым для физической интерпретации возникающих решений.

В главе 6 на фоне пространства де Ситтера исследуются: модель атома водорода на основе уравнения Клейна–Фока–Гордонаж; нерелятивистская векторная частица; электромагнитное поле; фермион с тремя массовыми параметрами. Основные результаты сводятся к следующему.

В статических пространствах де Ситтера

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad r \in [0, \rho)$$

построена теория атома водорода на основе уравнений Клейна – Фока – Гордона. В пространстве де Ситтера атом является нестабильной квантовомеханической системой с возможностью туннелирования частицы через барьер; задача сводится к общему уравнению Гойна

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)} \frac{df}{dx} + \left[\frac{(E + \alpha/x)^2}{(1-x^2)^2} - \frac{M^2 + l(l+1)/x^2}{1-x^2} \right] f = 0, \quad (34)$$

где использованы безразмерные переменные

$$x = \frac{r}{\rho}, \quad \frac{\epsilon\rho}{c\hbar} = E, \quad \frac{e^2}{c\hbar} = \alpha, \quad \frac{M^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \implies M^2.$$

Использование условия трансцендентности приводит к формуле для комплексных значений энергии, однако она не является физически интерпретируемой, поскольку не зависит от квантового числа углового момента j .

В пространстве анти де Ситтера

$$dS^2 = \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad r \in [0, +\infty)$$

задача также приводится к общему уравнению Гойна

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)} \frac{df}{dx} - \left[\frac{(E + i\alpha/x)^2}{(1-x^2)^2} - \frac{M^2 - l(l+1)/x^2}{1-x^2} \right] f = 0, \quad (35)$$

где используются безразмерные переменные

$$x = \frac{ir}{\rho}, \quad \frac{\epsilon\rho}{c\hbar} = E, \quad \frac{e^2}{c\hbar} = \alpha, \quad \frac{M^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \implies M^2.$$

В этой геометрической модели атом водорода является стабильной квантовомеханической системой; условие трансцендентности решений приводит к вещественному спектру, однако он не интерпретируется физически, поскольку не зависит от квантового числа углового момента.

В расширяющемся пространстве де Ситтера

$$dS^2 = dt^2 - \text{ch}^2 t [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (36)$$

после выполнения нерелятивистского приближения получена система из трех радиальных уравнений. С учетом диагонализации оператора пространственной инверсии для состояний с четностью $P = (-1)^{j+1}$ получено одно уравнение

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{1}{2M} \frac{1}{\text{ch}^2 t} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{\partial}{\partial r} - 1 - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} \right) \Psi; \quad (37)$$

для состояний с четностью $P = (-1)^j$ получены два связанных уравнения

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 = -\frac{1}{2M} \frac{1}{\text{ch}^2 t} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{\partial}{\partial r} - 1 - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} \right) \Psi_1 - \frac{2\nu \cos r}{\sin^2 r} \Psi_2 \right],$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 = -\frac{1}{2M} \frac{1}{\text{ch}^2 t} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{\sin^2 r} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} \right) \Psi_2 - \frac{4\nu \cos r}{\sin^2 r} \Psi_1 \right].$$

Зависимость функций от времени задается соотношениями

$$\Psi(t, r) = e^{-iE_0 \text{th} t} f(r), \quad \Psi_i(t, r) = e^{-iE \text{th} t} f_i(r), \quad i = 1, 2;$$

радиальная система уравнений имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} + 2ME_0 - 1 \right) f = 0, \quad (38)$$

$$\sin^2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} + 2ME - 1 \right) f_1 = 2\nu \cos r f_2,$$

$$\sin^2 r \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\tan r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu^2}{\sin^2 r} + 2ME - 2 \right) f_2 = 4\nu \cos r f_1. \quad (39)$$

Уравнение (38) решается в гипергеометрических функциях и приводит к известному в теории скалярной частицы спектру для E_0 . Система (39) в переменной $x = \cos^2 r$ принимает вид

$$\left[(1-x)4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-4x) \frac{d}{dx} - 1 - \frac{2\nu^2}{1-x} + 2M\epsilon \right] f_1 - \frac{2\nu\sqrt{x}}{1-x} f_2 = 0,$$

$$\left[(1-x)4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-4x) \frac{d}{dx} - \frac{2}{1-x} - \frac{2\nu^2}{1-x} + 2M\epsilon \right] f_2 - \frac{4\nu\sqrt{x}}{1-x} f_1 = 0.$$

Отсюда следуют уравнения 4-го порядка для функций f_1 и f_2 . Операторы 4-го порядка факторизуются в произведения двух коммутирующих операторов 2-го порядка, и задача сводится к уравнениям 2-го порядка, их решения

найлены в гипергеометрических функциях. Получены два дискретных спектра для параметра квазиэнергии:

$$\text{I. } 2M\epsilon + 1 = (2n + j + 1)^2; \quad \text{II. } 2M\epsilon + 1 = (2n + j + 2)^2. \quad (40)$$

Анализ обобщен на случай осциллирующего пространства де Ситтера, при этом квантования параметра квазиэнергии не возникает.

Уравнение Майораны – Оппенгеймера для электромагнитного поля

$$\alpha^c (e_{(c)}^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}) \Psi = 0, \quad \alpha^0 = -iI, \quad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} \quad (41)$$

решено в сферических координатах осциллирующего пространства де Ситтера. Весь анализ распространен на случай расширяющейся во времени вселенной де Ситтера.

Уравнение для трех биспиноров, описывающее фермион с тремя массовыми параметрами в присутствии внешних электромагнитных и гравитационных полей, имеет вид

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)] \Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y_1 \Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)] \Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y_2 \Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x) + ieA_\alpha(x)] \Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y_3 \Sigma(x)\Phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где (внутренние параметры модели определены в диссертации)

$$Y_i = \frac{4c_3}{3M} c_2(\lambda_i - c_2), \quad \Phi(x) = L_1\Phi_1(x) + L_2\Phi_2(x) + L_3\Phi_3(x).$$

Членом, пропорциональным величине $\Sigma(x) = -ieF_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}(x) + R(x)/4$, в моделях с $R(x) \neq 0$ уравнения сцепляют три биспинора в единую систему даже в отсутствие электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} i\gamma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)] \Phi_1(x) - M_1\Phi_1(x) + Y_1 \frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)] \Phi_2(x) - M_2\Phi_2(x) + Y_2 \frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0, \\ i\gamma^\alpha(x) [\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)] \Phi_3(x) - M_3\Phi_3(x) + Y_3 \frac{R(x)}{4}\Phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку в любом майорановском базисе выполняются равенства

$$[i\gamma^\alpha(x)]^* = i\gamma^\alpha(x), \quad \Gamma_\alpha^*(x) = \Gamma_\alpha(x),$$

то система (43) допускает ограничение к случаю майорановских частиц. Исследована модельная ситуация, когда локально допустимо использование декартовых координат, а внешний геометрический фон эффективно учитывается постоянным скаляром Риччи. Используется упрощенная одномерная модель (хотя это не существенное ограничение)

$$\begin{aligned}
(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M_1)\Phi_1 + d_1(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) &= 0, \\
(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M_2)\Phi_2 + d_2(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) &= 0, \\
(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - M_3)\Phi_3 + d_3(L_1\Phi_1 + L_2\Phi_2 + L_3\Phi_3) &= 0;
\end{aligned} \tag{44}$$

использовано обозначение $d_i = Y_i(R/4)$. Диагонализация матрицы смешивания в системе (44) приводит к трем отдельным уравнениям дираковского типа с новыми эффективными массами, значения которых определяются внутренними параметрами модели и величиной скаляра Риччи:

$$\begin{aligned}
[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_1] \bar{\Phi}_1 &= 0, \quad \bar{M}_1 = M + \mu_1, \\
[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_2] \bar{\Phi}_2 &= 0, \quad \bar{M}_2 = M + \mu_2, \\
[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_1 - \bar{M}_3] \bar{\Phi}_3 &= 0, \quad \bar{M}_3 = M + \mu_3.
\end{aligned} \tag{45}$$

Проведен аналитический и численный анализ процедуры диагонализации. Возможны две физически разные возможности: $r > 0$ при положительной кривизне и $r < 0$ при отрицательной кривизне. Проанализированы несколько примеров при разных величинах скаляра Риччи:

$$\begin{aligned}
r = +10^{-30}, \quad r = +10^{-5}, \quad r = +10^{-3}, \quad r = +10^{-2}, \quad r = +1; \\
r = -10^{-30}, \quad r = -10^{-5}, \quad r = -10^{-3}, \quad r = -10^{-2}, \quad r = -1;
\end{aligned} \tag{46}$$

Последний случай $|r| = 1$ е следует относить к очень сильному искривлению пространства, когда модель перестает давать вещественные значения массовых параметров $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Развита теория частицы со спином $1/2$ и двумя (тремя) массовыми параметрами [8, 75, 80, 82, 84, 85, 86, 91, 92]. Формализм Петраша для частицы со спином $1/2$ и аномальным магнитным моментом обобщен на P -асимметричный случай, описывающий частицу с электрическим дипольным моментом; P -асимметричная теория развита также для фермиона с тремя

массовыми параметрами [89, 129]. Уравнение Федорова для частицы со спином 2 обобщено на риманово пространство–время [96, 99].

2. Из релятивистского уравнения для скалярной частицы частицы Кокса с распределенным по конечному объему зарядом выведено нерелятивистское уравнение [8, 50, 56, 139], построены его решения в однородном магнитном поле в пространствах Минковского, Лобачевского и Римана [8, 52, 52, 71, 76, 54, 71, 76]. Построены решения уравнения для частицы Кокса в присутствии внешнего кулоновского поля; спектр энергии найден на основе использования трансцендентных решений Фробениуса радиального уравнения [8, 50, 87, 90, 94].

3. В пространстве Минковского найдены решения уравнения Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом в магнитном поле [7, 8, 12, 66, 67]; в пространствах Лобачевского и Римана найдены решения уравнения Дирака в магнитном поле [14, 15, 22, 28, 33, 36, 56]. В пространствах Лобачевского и Римана для уравнения Паули с учетом кулоновского поля найдены решения в терминах общих функций Гойна [3, 8, 23, 24, 58]; в этих же моделях построены решения уравнения Дирака [23, 24, 97, 98]. P -неинвариантное уравнение для частицы со спином $1/2$ с учетом кулоновского поля решено в терминах функций Гойна [64, 89, 113]. Выведено нерелятивистское уравнение для частицы Дирака – Кэлера, в пространствах Лобачевского и Римана построены его точные решения [4, 9, 57, 62, 63]. Построены решения уравнения Дирака в поле магнитного заряда в моделях де Ситтера и анти де Ситтера [29, 30, 51, 106]. Уравнение для частицы со спином $1/2$ и двумя массовыми параметрами решено с учетом внешнего кулоновского поля, из возникающего дифференциального уравнения 4-го порядка с применением условия трансцендентности найдены спектры энергий [75, 82, 100].

4. Уравнение для векторной частицы с учетом ее аномального магнитного момента решено в магнитном и электрическом полях; аналогичные решения найдены для частицы с электрическим квадрупольным моментом [10, 11, 69, 70, 72, 77]. Для векторной частицы с поляризуемостью построены решения в магнитном поле, найден обобщенный спектр энергии [2, 7, 8, 19, 35]. Решена система из 6 радиальных уравнений, описывающая векторную частицу в кулоновском поле в состояниях с четностью $P = (-1)^j$; выведены два различающиеся дифференциальные уравнения 2-го порядка для основной функции, которые приводят к двум разным спектрам энергии [5, 17, 26, 31, 34, 81, 83, 88, 93, 95].

5. Построены решения уравнений Максвелла в виде обобщенных плоских волн в пространстве Лобачевского, отражаемых от создаваемого геометрией пространства потенциального барьера; глубина проникновения частицы за

барьер определяется третьей проекцией импульса частицы и радиусом кривизны пространства Лобачевского [1, 4, 5, 13, 25, 46, 47, 73]. Аналогичный результат получен для нерелятивистской частицы со спином 0 [1, 5, 27, 43, 73] и дираковской частицы [38, 39, 46, 48, 53]. Этот анализ распространен на случай осциллирующей модели де Ситтера [1, 5, 74, 78, 79]. В пространстве Лобачевского на основе использования квазидекартовой системы координат построены решения уравнения Даффина – Кеммера для векторной частицы; показано, что вывод об отражении частиц от барьера остается справедливым и в этом случае, выполнен переход к безмассовому случаю [32, 37, 40, 41, 46].

6. В расширяющемся пространстве де Ситтера построена нерелятивистская теория для векторной частицы, найдены решения радиальной системы уравнений в нерелятивистском приближении; найден дискретный спектр для параметра квазиэнергии. Анализ обобщен на случай осциллирующего пространства де Ситтера, при этом параметр квазиэнергии не квантуется [6, 18, 21, 45, 55, 65].

7. Матричное уравнение Майораны – Оппенгеймера для электромагнитного поля решено в сферических координатах осциллирующего пространства де Ситтера; построены электромагнитные волны электрического и магнитного типов; анализ распространен на случай расширяющейся Вселенной де Ситтера [25, 47, 49, 60, 61].

8. Разработан метод моделирования смешивания нейтринных масс за счет неевклидовой геометрии пространства–времени на основе использования уравнений для гипотетических частиц с несколькими массовыми параметрами, последние являются корректными в рамках общей теории релятивистских волновых уравнений с расширенными наборами представлений группы Лоренца [75, 82, 84, 91, 92].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут найти дальнейшее применение в исследованиях по теоретической физике, в том числе в Государственном научном учреждении "Институт физики имени Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси" и Белорусском государственном университете. Результаты могут найти применение при планировании экспериментов по измерению дополнительных характеристик элементарных частиц.

Рассмотренные в диссертации задачи и методы их решения могут использоваться в учебных курсах по квантовой механике в Мозырском государ-

ственном педагогическом университете имени И.П. Шамякина, Брестском государственном университете имени А.С. Пушкина, Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины, Белорусском государственном университете. Результаты исследований, вошедшие в диссертацию, внедрены в образовательный процесс УО "Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина" [141, 142, 143, 144].

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. Овсиюк Е.М., Редьков В.М. Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – 228 с.
2. Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, Г.Г. Крылов, В.М. Редьков. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – 232 с.
3. Redkov V.M., Ovsyuk E.M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 pages.
4. Овсиюк Е.М. Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией. – Минск: РИВШ, 2013. – 406 с.
5. Ovsyuk E.M. Maxwell electrodynamics and boson fields in spaces of constant curvature / E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2014. – 486 pages.
6. Квантовая механика в космологических моделях де Ситтера / О.В. Веко, К.В. Дашук, В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2016. – 515 с.
7. Квантовая механика частиц со спином в магнитном поле / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, В.В. Кисель, В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2017. – 517 с.
8. Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory. II. Physical problems / V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V. Balan, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 pages, 402 pages.

Главы в книгах

9. Non-relativistic description of the Dirac – Kähler particle on the background of curved space–time / K.V. Kazmerchuk, V.V. Kisel, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov, O.V. Veko // Chapter in the book "Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations" / Ed. V.V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 59–74.
10. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field / E.M. Ovsyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter in the book "Quaternions: Theory and Applications" / Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2017. – P. 47–84.
11. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / E.M.

Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter in the book "Quaternions: Theory and Applications" / Ed. Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2017. – P. 11–46.

12. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Chapter in the book "Relativity, Gravitation, Cosmology: Beyond Foundations" / Ed. V.V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2019. – P. 65–80.

Статьи в журналах

13. Maxwell equations in Riemannian space–time, geometry effect on material equations in media / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, E.M. Bychkovskaya (= E.M. Ovsiyuk), G.J. Spix // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2009. – Vol. 12, no. 3. – P. 232–250.

14. Овсиюк Е.М., Кисель В.В., Редьков В.М. О решениях уравнения Дирака в однородном магнитном поле в пространстве Лобачевского // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 3. – С. 47–54.

15. Овсиюк Е.М., Кисель В.В., Редьков В.М. О дираковской частице в однородном магнитном поле в пространстве Римана // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 4. – С. 91–97.

16. Кисель В.В., Овсиюк Е.М., Редьков В.М. О решениях уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в однородном магнитном поле // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 4. – С. 64–71.

17. Kisel V.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2010. – Vol. 13, no. 4. – P. 352–367.

18. Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. Spherical waves of spin 1 particle in anti de Sitter space–time // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, no. 6. – P. 1247–1276.

19. Exact solutions for a quantum-mechanical particle with spin 1 and additional intrinsic characteristic in a homogeneous magnetic field / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, no. 11. – P. – 2347–2363.

20. Овсиюк Е.М., Токаревская Н.Г. Квантовомеханическая частица со спином 1 в однородном магнитном поле: нерелятивистский предел // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 3. – С. 43–48.

21. Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M. On exact solutions for quantum particles with spin $S = 0, 1/2, 1$ and de Sitter event horizon // Ricerche di matematica. – 2011. – Vol. 60, no. 1. – P. 57–88.

22. On some integrable systems in the extended Lobachevsky space / Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik, E.M. Ovsiyuk, Dz.V. Shoukavy // Ядерная фи-

зика. – 2011. – Т. 74, № 6. – С. 969–973; Physics of Atomic Nuclei. – 2011. – Vol. 74, no. 6. – P. 944–948.

23. Овсиюк Е.М. Задача Кеплера для нерелятивистской частицы со спином $1/2$ в пространстве Лобачевского, точные решения уравнения Паули // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 23–29.

24. Ovsiyuk E.M. Quantum Kepler problem for spin $1/2$ particle in spaces on constant curvature. I. Pauli theory // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2011. – Vol. 14, no. 1. – P. 14–26.

25. Maxwell equations in complex form, squaring procedure and separating the variables / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya // Ricerche di Matematica. – 2011. – Vol. 60, no. 1. – P. 1–14.

26. Кисель В.В., Редьков В.М., Овсиюк Е.М. Волновые функции и спектр энергии для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 1. – С. 50–55.

27. Овсиюк Е.М., Веко О.В. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–36.

28. Овсиюк Е.М. Решения уравнения Дирака в аналогах однородного магнитного и электрического полей в пространстве Римана // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 4. – С. 85–92.

29. Овсиюк Е.М., Веко О.В. Частица со спином $1/2$ в присутствии абелева монополя на фоне пространства–времени анти де Ситтера. Случай j_{min} // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 49–55.

30. Овсиюк Е.М., Веко О.В. Частица со спином $1/2$ в присутствии абелева монополя на фоне пространства–времени анти де Ситтера. Случай $j > j_{min}$ // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 43–49.

31. Овсиюк Е.М., Токаревская Н.Г. Нерелятивистское описание частицы со спином 1 в кулоновском поле // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – № 1. – С. 69–75.

32. Овсиюк Е.М. Квазиплоские волны для поля со спином 1 в пространстве Лобачевского и обобщенный оператор спиральности // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 34–39.

33. Ovsiyuk E.M., Kisel V.V., Red'kov V.M. On the Dirac particle in a uniform magnetic field in 3-dimensional space of constant negative curvature // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2012. – Vol. 15, no. 1. – P. 43–57.

34. Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. физико-математические науки. – 2012. – № 1 (141). –

С. 137–145.

35. Квантовая механика векторной частицы в магнитном поле на четырехмерной сфере / В.В. Кисель, Е.М. Овсюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. физико-математические науки. – 2012. – № 1 (141). – С. 128–137.

36. Kurochkin Yu.A., Otchik V.S., Ovsiyuk E.M. Magnetic field in the Lobachevsky space and related integrable systems // Physics of Atomic Nuclei. – 2012. – Vol. 75, no. 10. – P. 1245–1249; Ядерная физика. – 2012. – Т. 75, № 10. – С. 1316–1320.

37. Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M., Kisel V.V. Spin 1 particle on 4-dimensional sphere: extended helicity operator, separation of the variables, and exact solutions // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2012. – Vol. 15, no. 3. – P. 241–252.

38. Ovsiyuk E. Quasi-plane waves for a particle with spin 1/2 on the background of Lobachevsky geometry: simulating of a special medium // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2012. – Vol. 15, no. 3. – P. 209–226.

39. Овсюк Е.М., Веко О.В. Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 4. – С. 80–83.

40. Ovsiyuk E.M., Kazmerchuk K.V. Nonrelativistic approximation for quasi-planes waves of a spin 1 particle in Lobachevsky space // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, no. 1. – P. 42–50.

41. Овсюк Е.М. Поле со спином 1 в пространстве Лобачевского: точные решения в системе орисферических координат // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 3. – С. 113–118.

42. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid and Lobachevsky: non-relativistic approximation / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58, no. 11. – P. 1073–1083.

43. Ovsiyuk E.M., Veko O.V. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58, no. 11. – P. 1065–1072.

44. Ovsiyuk E.M., Kazmerchuk K.V., Veko O.V. Particle with spin 1 in spherical Riemann space: Pauli approximation in spherically symmetric potentials // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, no. 3. – P. 261–278.

45. Овсюк Е.М., Казмерчук К.В. Частица со спином 1 в сферическом пространстве Римана: приближение Паули в поле магнитного заряда // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2013. – № 2. – С.

18–27.

46. Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Red'kov V.M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2013. – Vol. 16, no. 4. – P. 331–344.

47. Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M., Tokarevskaya N.G. Majorana – Oppenheimer approach to Maxwell electrodynamics. Part III. Electromagnetic spherical waves in spaces of constant curvature // *Adv. Appl. Clifford Algebras*. – 2013. – Vol. 23, no. 1. – P. 153–163.

48. Веко О.В., Казмерчук К.В., Овсиюк Е.М. Точные решения уравнения Дирака в расширяющейся Вселенной де Ситтера // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 38–44.

49. Electromagnetic field on de Sitter expanding universe: Majorana – Oppenheimer formalism, exact solutions in non-static coordinates / O.V. Veko, N.D. Vlasii, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, Yu.A. Sitenko // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2014. – Vol. 17, no. 1. – P. 17–39.

50. Овсиюк Е.М., Веко О.В., Казмерчук К.В. Скалярная частица с внутренней структурой в электромагнитном поле в искривленном пространстве–времени // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 3 (20). – С. 32–36.

51. Veko O.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. Dirac particle in the presence of a magnetic charge in de Sitter Universe: exact solutions and transparency of the cosmological horizon // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2014. – Vol. 17, no. 4. – P. 461–463.

52. On geometry influence on the behavior of a quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields / O.V. Veko, K.V. Kazmerchuk, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2014. – Vol. 17, no. 4. – P. 464–466.

53. Овсиюк Е.М., Веко О.В., Редьков В.М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином $1/2$ // *Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук*. – 2015. – № 1. – С. 76–85.

54. Kazmerchuk K.V., Ovsiyuk E.M. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of the spherical Riemann geometry // *Ukr. J. Phys.* – 2015. – Vol. 60, no. 5. – P. 389–400.

55. Овсиюк Е.М. Уравнение Паули для частицы со спином 1 в сферическом пространстве Римана, точные решения // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2015. – Т. 59, № 2. – С. 47–52.

56. Ovsiyuk E.M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields // *Ukr. J. Phys.* –

2015. – Vol. 60, no. 6. – P. 485–496.

57. Частица Дирака – Кэлера в сферическом пространстве Римана: бозонная интерпретация, точные решения / Е.М. Овсюк, А.М. Ишкхьян, О. Флореа, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2015. – № 1. – С. 15–26.

58. Ovsyuk E.M., Kazmerchuk K.V. On solutions of the Pauli equation in non-static de Sitter metrics // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2015. – Vol. 18, no. 2. – P. 198–206.

59. Spin 1 particle in the magnetic monopole potential for Minkowski and Lobachevsky spaces: nonrelativistic approximation / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, К.В. Казмерчук, Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, А.М. Ишкхьян, В.М. Редьков // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2015. – Vol. 18, no. 2. – P. 243–258.

60. Овсюк Е.М., Дашук К.В., Веко О.В. Электромагнитное поле в осциллирующей Вселенной де Ситтера: формализмы Майораны – Оппенгеймера и Даффина – Кеммера, точные решения // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 5. – С. 38–43.

61. Овсюк Е.М. Электромагнитное поле в формализме Майораны – Оппенгеймера во Вселенной анти де Ситтера // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3(24). – С. 21–25.

62. Овсюк Е.М., Редько А.Н., Редьков В.М. Частица Дирака – Кэлера в пространстве Лобачевского, нерелятивистское приближение, бозонная интерпретация // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 4. – С. 61–70.

63. Dirac – Kähler particle in Riemann spherical space: boson interpretation / Е.М. Овсюк, А.М. Ишкхьян, О. Флореа, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков // Can. J. Phys. – 2015. – Vol. 93. – P. 1427–1433.

64. Confluent Heun functions and the Coulomb problem for spin 1/2 particle in Minkowski space / V. Balan, А.М. Манукьян, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков, О.В. Веко // Applied Sciences. – 2015. – Vol. 17. – P. 9–23.

65. Овсюк Е.М. Нерелятивистское описание для векторной частицы в расширяющейся Вселенной де Ситтера // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 63–71.

66. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field / Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, no. 2. – P. 153–165.

67. Частица со спином 1/2 с аномальным магнитным моментом в однородном электрическом поле / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 22–28.

68. Hydrogen atom in de Sitter spaces / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, K.V. Dashuk, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov, A.M. Ishkhanyan // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2016. – Vol. 19, no. 1. – P. 16–29.

69. Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле / В.В. Кисель, О.В. Веко, Я.А. Войнова, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 83–90.

70. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform magnetic field / V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2017. – Vol. 20, no. 1. – P. 21–39.

71. Частица Кокса во внешнем магнитном поле, анализ в пространстве Лобачевского / О.В. Веко, Я.А. Войнова, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // *Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2017. – № 4. – С. 55–65.

72. Квантовая механика частицы со спином 1 и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, В.М. Редьков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.

73. Bolyai – Lobachevsky geometrical simulation of a media acting as an ideal mirror on the particles / O.V. Veko, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, V.M. Red'kov // *Proceedings of Balkan Society of Geometers*. – 2017. – Vol. 24. – P. 74–90.

74. Овсиюк Е.М., Коральков А.Д. Скалярное поле в осциллирующей Вселенной де Ситтера и отражение от космологического барьера // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 18–25.

75. Spin 1/2 particle with two mass states, interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2017. – Vol. 20, no. 4. – P. 404–423.

76. Chichurin A.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. Modeling the quantum tunneling effect for a particle with intrinsic structure in presence of external magnetic field in the Lobachevsky space // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2018. – Vol. 75, no. 5. – P. 1550–1565.

77. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external uniform electric field / E. Ovsiyuk, Ya. Voynova, V. Kisel, V. Balan, V. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2018. – Vol. 21, no. 1. – P. 1–20.

78. Овсиюк Е.М., Голуб А.А., Коральков А.Д. Отражение от космологического барьера в осциллирующей Вселенной де Ситтера частиц Дирака, Майораны и Вейля // *Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 300–315.

79. Ovsiyuk E.M., Golub A.A., Koralkov A.D. Spin 1/2 particles in

oscillating de Sitter universe: reflection from the cosmological barrier // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21, no. 1. – P. 44–55.

80. Spin 1/2 particle with two masses in magnetic field / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Applied Sciences. – 2018. – Vol. 20. – P. 148–166.

81. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, A.D. Koral'kov, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings. – 2018. – Vol. 25. – P. 59–78.

82. Кисель В.В. Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях / В.В. Кисель, Е.М. Овсиук, О.В. Веко, В.М. Редьков // Известия Коми научного центра УрО РАН. Серия "Физико-математические науки". – 2018. – Вып. 33. – С. 81–88.

83. Об описании связанных состояний для частицы со спином 1 в кулоновском поле / Е.М. Овсиук, О.В. Веко, Я.А. Войнова, А.Д. Коральков, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2(35). – С. 21–33.

84. Фермион с тремя массовыми параметрами: взаимодействие с внешними полями / В.В. Кисель, В.А. Плетюхов, Е.М. Овсиук, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков. // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 661–667.

85. Фермион с тремя массовыми параметрами, общая теория, взаимодействие с внешними полями / В.А. Плетюхов, В.В. Кисель, Е.М. Овсиук Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // Ученые записки Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина. Ч. 2. Естественные науки. – 2018. – Вып. 14, ч. 2. – С. 16–50.

86. Spin 1/2 particle with two masses in external magnetic field / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov, V.V. Kisel, N.V. Samsonenko // J. Mech. Cont. and Math. Sci. – 2019. – Special Issue-1. – P. 651–660.

87. Войнова Я.А., Коральков А.Д., Овсиук Е.М. Скалярная частица со структурой Дарвина – Кокса во внешнем кулоновском поле // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер физ.-мат. наук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 467–478.

88. Spin 1 particle with polarizability in the external Coulomb field, nonrelativistic description / E.M. Ovsiyuk, A.V. Chichurin, Ya.A. Voynova, V.M. Red'kov // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2019. – Vol. 26. – P. 79–101.

89. On P-noninvariant wave equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment / V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov

// Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, no. 1. – P. 18–40.

90. Scalar particle with intrinsic Darwin – Cox structure: general theory, presence of external Coulomb field, solutions of radial equation, quantization / E.M. Ovsiyuk, A.D. Koral'kov, Ya.A. Voynova, A.V. Chichurin, V.M. Red'kov // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – Vol. 1416. – Paper 012026 [9 pages].

91. On modeling neutrinos oscillations by geometry methods in the frames of the theory for a fermion with three mass parameters / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, V.M. Red'kov // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – Vol. 1416. – Paper 012040 [9 pages].

92. Войнова Я.А., Овсиюк Е.М. О проявлении космологической кривизны пространства в модели нейтрального фермиона с тремя массовыми параметрами // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 18–28.

93. Vector particle with electric quadrupole moment in external Coulomb field / A. Koralkov, Ya. Voynova, N. Krylova, E. Ovsiyuk, V. Balan // Balkan Society of Geometers Proceedings. – 2020. – Vol. 27. – P. 80–106.

94. Scalar particle with Darwin – Cox structure in external Coulomb field / A.D. Koral'kov, E.M. Ovsiyuk, V.V.Kisel, Ya.A.Voynova, A.V. Chichurin, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2020. – Vol. 23, no. 4. – P. 342–358.

95. Овсиюк Е.М., Коральков А.Д., Войнова Я.А. Векторная частица с электрическим квадрупольным моментом в кулоновском поле, нерелятивистская теория // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 54–61.

96. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich, A. Buryu, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Kisel, V. Red'kov // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 1–23.

97. Dirac particle in the Coulomb field on the background of hyperbolic Lobachevsky model / E.M. Ovsiyuk, A.D. Koral'kov, A.V. Chichurin, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2021. – Vol. 24, no. 3. – P. 260–271.

98. Овсиюк Е.М., Коральков А.Д. Дираковская частица во внешнем кулоновском поле на фоне пространств Лобачевского – Римана // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 2. – С. 146–157.

99. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich, A. Buryu, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Kisel, V. Red'kov // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – Vol. 29. – P. 12 – 33.

100. Spin 1/2 particle with two mass parameters in external Coulomb field / E. Ovsiyuk, V. Balan, A. Koral'kov, A. Safronov // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – Vol. 29. – P. 74 – 86.

Материалы конференций

101. Овсиюк Е.М., Токаревская Н.Г. Заряженная скалярная частица с поляризуемостью в магнитном поле // Гомельский научный семинар по теоретической физике, посвященный 100-летию со дня рождения Ф.И. Федорова: материалы Научного семинара по теоретической физике, Гомель, 20–22 июня 2011 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: А.В. Рогачев (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2011. – С. 161–164.

102. Овсиюк Е.М. Электрон в однородном магнитном поле в пространстве Лобачевского, нерелятивистский предел // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности: сб. науч. трудов / Институт физики НАН Беларуси; редкол.: Ю.А. Курочкин [и др.]. – Минск, 2011. – С. 122–131.

103. Овсиюк Е.М. О решении уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в пространстве–времени анти де Ситтера // Физико-математические науки и образование: проблемы и перспективы исследований: сб. науч. тр. преподавателей физ.-мат. фак. / редкол.: И.Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – С. 152–159.

104. Quantum mechanical particle in magnetic field in the extended Lobachevsky space / Yu. Kurochkin, V. Otchik, E. Ovsiyuk, Dz. Shoukavy // Actual Problems of Microworld Physics: Proceedings of International School-Seminar, Gomel, Belarus, August 1–12, 2011. – Dubna: JINR, 2011. – P. 35–45.

105. Wave functions of the particle with polarizability in Coulomb field / V.V. Kisel, G.G. Krylov, E.M. Ovsiyuk, M. Amirfachrian, V.M. Red'kov // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of XVIII Annual Seminar NPCSS – 2011, Minsk, May 17–20, 2011 / редкол.: Л.Ф. Бабичев [и др.]; под ред. Л.Ф. Бабичева, В.И. Кувшинова. – Минск: РИВШ, 2011. – Вып. 18. – С. 168–179.

106. Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M., Veko O.V. Spin 1/2 particle in the field of Dirac string on the background of the Sitter space–time // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of XVIII Annual Seminar NPCSS – 2011, Minsk, May 17–20, 2011 / редкол.: Л.Ф. Бабичев [и др.]; под ред. Л.Ф. Бабичева, В.И. Кувшинова. – Минск: РИВШ, 2011. – Вып. 18. – С. 120–144.

107. Ovsiyuk E., Kisel V., Red'kov V. On a Dirac particle in an uniform magnetic field in 3-dimensional space of constant negative curvature // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of XVIII Annual Seminar NPCSS – 2011, Minsk, May 17–20, 2011 / редкол.: Л.Ф. Бабичев [и др.]; под ред. Л.Ф. Бабичева, В.И. Кувшинова. – Минск: РИВШ, 2011. – Вып. 18. – С. 145–164.

108. Квантовая механика частицы со спином 1 в потенциале магнитного монополя, нерелятивистское приближение / О.В. Веко, К.В. Казмерчук, Е.М. Овсюк, А.И. Шелест, В.М. Редьков // II Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Москва, 14–17 мая 2013 г. / РУДН. – Москва, 2013. – С. 34–39.

109. Квантовая механика частицы со спином 1 в нерелятивистском приближении на фоне пространства Лобачевского / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, В.В. Кисель, В.М. Редьков // II Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Москва, 14–17 мая 2013 г. / РУДН. – Москва, 2013. – С. 29–33.

110. Атом водорода в геометрии де Ситтера / О.В. Веко, К.В. Казмерчук, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков // L Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники, Москва, 13–16 мая 2014 г. / РУДН. – Москва, 2014. – С. 41–47.

111. Ovsyuk E.M., Kisel V.V., Red'kov V.V. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions // Proceedings of the IX International Conference "Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics Bolyai–Gauss–Lobachevsky–9 (BGL–9), Minsk, 27–30 November 2015 / Edited by Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2015. – P. 250–259.

112. Ovsyuk E.M., Dashuk K.V., Veko O.V. Electromagnetic field in oscillating de Sitter universe: Majorana – Oppenheimer and Duffin – Kemmer approaches, exact solutions // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2015. – Vol. 21. – P. 180–210.

113. Confluent Heun functions and the Coulomb problem for spin 1/2 particle in Minkowski space / E.M. Ovsyuk, O.V. Veko, V. Balan, A.M. Manukyan, V.M. Red'kov // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2015. – Vol. 21. – P. 211–228.

114. Hydrogen atom in de Sitter spaces / E. Ovsyuk, K. Dashuk, O. Veko, V. Red'kov, A. Ishkhanyan // Proceedings of the IX International Conference "Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics Bolyai–Gauss–Lobachevsky–9 (BGL–9), Minsk, 27–30 November 2015 / Edited by Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2015. – P. 260–273.

115. Spin 1 particle in the Coulomb field on the background of Lobachevsky geometry: general Heun function, analytical and numerical study / A.V. Chichurin, E.M. Ovsyuk, A.V. Red'ko, V.M. Red'kov // Computer Algebra Systems in Teaching and Research / Eds. A.N. Prokopenya, M. Jakubiak. – Vol. 5. – Siedlce University of Natural Sciences and Humanities: Poland, 2015. – P. 40–54.

116. Chichurin A.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. Dirac – Kähler particle in Riemann spherical space: analytical and numerical study, visualization // *Studia i Materialy*. – 2015. – № 1 (9). – P. 41–54.

117. Chichurin A.V., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. Nonrelativistic vector particle in Coulomb field on the background of Lobachevsky geometry: analytical and numerical study, visualization // *Studia i Materialy*. – 2015. – № 2 (10). – P. 45–58.

118. Quantum mechanics for a vector particle with anomalous magnetic moment in the uniform magnetic field / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, Y.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Dynamics and Applications*. – 2016. – Vol. 22. – P. 218–237.

119. On reflecting the Dirac – Weyl – Majorana fermions by an effective medium generated by Lobachevsky geometry / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Y.A. Voynova, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // *Nonlinear Dynamics and Applications*. – 2016. – Vol. 22. – P. 184–200.

120. Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в однородном магнитном поле / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, Я.А. Войнова, О.В. Веко, В.М. Редьков // ЛII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, Москва, 17–19 мая 2016 г. / РУДН. – Москва, 2016. – С. 45–50.

121. Spin 1/2 particle with two mass states: interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletjukhov, V.V. Gilewsky, E.V. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Dynamics and Applications*. – 2017. – Vol. 23. – P. 210–230; Proceedings of the 24-th Annual Seminar NPC'S'2017, Minsk, May 16–19, 2017 = Нелинейная динамика и приложения: труды XXIV Международного семинара, Минск, 16–19 мая 2017 г. / редкол.: В.И. Кувшинов [и др.]; под ред., В.И. Кувшинова, В.А. Шапорова, Л.Ф. Бабичева; Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – "Сосны" НАН Беларуси. – Минск: Право и экономика, 2017.

122. Овсиюк Е.М., Голуб А.А., Коральков А.Д. Частица со спином 1/2 в осциллирующей Вселенной де Ситтера, отражение от космологического барьера // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2018): материалы Международной научной конференции. Гродно, 15–18 мая 2018 г. – Часть 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2018. – С. 101–103.

123. Fermion with three mass parameters: general theory, interaction with external fields / V.V. Kisel, V.A. Pletjukhov, E.M. Ovsiyuk, Y.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Dynamics and Applications*. – 2018. – Vol. 24. – P. 141–164.

124. Chichurin A.V., Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M. Quantum particle with intrinsic structure in presence of magnetic field on the background of spherical Riemann space // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2019): материалы Международной научной конференции. Могилев, 14–17 мая 2019 г. – Часть 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2019. – С. 103–105.

125. On Modeling Neutrinos Oscillations by Geometry Methods in the Frames of the Theory for a Fermion with Three Mass Parameters / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.A. Pletyukhov, V.V. Gilewsky, V.M. Red'kov // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of the Twenty six Anniversary Seminar NPC'S'2019, Minsk, May 21–24, 2019 = Нелинейная динамика и приложения: труды XXVI Международного семинара, Минск, 21–24 мая 2019 г. / редкол.: В.И. Кувшинов [и др.]; подред., В.И. Кувшинова, В.А. Шапорова; Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – "Сосны" НАН Беларуси. – Минск: Право и экономика, 2019. – Р. 149–167.

126. Ovsiyuk E.M., Koralkov A.D. Hydrogen atom in spherical space, Dirac theory, exact solutions and energy spectrum // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of the Twenty eight Anniversary Seminar NPC'S'2021, Minsk, May 18–21, 2021 = Нелинейная динамика и приложения: труды XXVIII Международного семинара, Минск, 18–21 мая 2021 г. / редкол.: В.А. Шапоров [и др.]; под ред. В.А. Шапорова, А.Г. Трифонова; Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – "Сосны" НАН Беларуси. – Минск: Право и экономика, 2021. – Р. 199–216.

127. Ovsiyuk E., Chichurin A., Red'kov V. Spin 1/2 particle with two mass parameters in external Coulomb field // Математика. Информационные технологии. Образование: сб. статей / Луцк: ВНУ им. Леси Украинки, Изд-во ПП Иванюк В.П., 2021. – № 8. – С. 5–12.

128. Овсиюк Е.М., Коральков А.Д. Атом водорода в сферическом пространстве: теория Дирака, волновые функции, спектр энергий // LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники = LVII All-Russia Conference on Problems in Dynamics, Particle Physics, Plasma Physics and Optoelectronics: материалы конференции. Москва, РУДН, 17–21 мая 2021 г. / РУДН. – Москва, 2021. – С. 34–39.

129. Spin 1/2 particle with the anomalous magnetic and electric dipole moments, theories with one and three mass parameters / E. Ovsiyuk, A. Safronov, A. Koralkov, V. Kisel // Nonlinear Dynamics and Applications: Proceedings of the Twenty eight Anniversary Seminar NPC'S–2021, Minsk, May 18–21, 2021 = Нелинейная динамика и приложения: труды XXVIII Международного семинара, Минск, 18–21 мая 2021 г. / редкол.: В.А. Шапоров [и др.]; под ред.

В.А. Шапорова, А.Г. Трифонова; Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – "Сосны" НАН Беларуси. – Минск: Право и экономика, 2021. – С. 354–383.

Тезисы докладов

130. Red'kov V.M., Ovsiyuk E.M., Kisel V.V. Quantum-mechanical particle with spin $1/2$ in external magnetic field in hyperbolic and spherical models, exact solutions // Non-Euclidean geometry and its Applications: Proc. of 7th International Conference Bolyai–Gauss–Lobachevsky, Cluj-Napoca, Romania, 5–9 July 2010 / Ed.: Ildiko I. Mezei. – Cluj-Napoca, Romania, 2010. – P. 32.

131. Овсюк Е.М., Веко О.В. Частица со спином $1/2$ в поле абелева монополя на фоне пространства–времени анти де Ситтера. Случай $j = j_{min}$ // III Конгресс физиков Беларуси: тезисы докладов, Минск, 25–27 сентября 2011 г. / НАН Беларуси; ред.: С.Я. Килин. – Минск, 2011. – С. 27.

132. Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. Quasi-plane waves for a electromagnetic and spinor fields on the background of Lobachevsky geometry: simulating of a special medium // BGL–8 International Conference on Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics: programme and abstracts, Uzhgorod, 22–25 May 2012 / укл. А.М. Завілопуло. – Ужгород: ФОП Бреза А.Е., 2012. – С. 31.

133. Red'kov V., Ovsiyuk E., Veko O. Spin $1/2$ particle in the field of Dirac string on the background of de Sitter space–time // BGL–8 International Conference on Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics: programme and abstracts, Uzhgorod, 22–25 May 2012 / укл. А.М. Завілопуло. – Ужгород: ФОП Бреза А.Е., 2012. – С. 30.

134. Квантовая механика частицы со спином 1 в нерелятивистском приближении на фоне пространства Лобачевского / О.В. Веко, Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков // IV Конгресс физиков Беларуси (24–26 апреля 2013 г.): сборник научных трудов / редкол.: С.Я. Килин (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Ковчег, 2013. – С. 59–60.

135. Квантовая механика частицы со спином 1 в потенциале магнитного монополя, нерелятивистское приближение / Е.М. Овсюк, О.В. Веко, К.В. Казмерчук, А.И. Шелест, В.М. Редьков // IV Конгресс физиков Беларуси (24–26 апреля 2013 г.): сборник научных трудов / редкол.: С.Я. Килин (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Ковчег, 2013. – С. 45–46.

136. Кисель В.В., Овсюк Е.М., Редьков В.М. Уравнение Гойна и квантование движения частицы со спином 1 в кулоновском поле // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докладов Международной научной конференции. Гродно, 13–16 мая 2013 г. – Часть 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси,

2013. – С. 66–67.

137. Овсиюк Е.М., Редьков В.М. Уравнение Гойна и квантование движения частицы со спином $1/2$ в кулоновском поле // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2013): тез. докладов Международной научной конференции. Гродно, 13–16 мая 2013 г. – Часть 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2013. – С. 73.

138. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / E. Ovsyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov // Quantum groups and quantum integrable systems: Program and Abstracts of International Conference, Kiev, June 18–21, 2013 / National Academy of Sciences of Ukraine, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Institute of Mathematics. – Kiev, 2013. – P. 42.

139. Ovsyuk E.M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields // V Young Scientists Conference "Problems of theoretical physics": Program & Proceedings, Kiev, December 24–27, 2013 / National Academy of Sciences of Ukraine, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Young Scientists Council; eds.: O. Gamayun [et al.]. – Kiev, 2013. – P. 65.

140. Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Теоретико-групповые методы исследования физических систем: тезисы докладов Междунар. семинара, Сыктывкар, Республика Коми, 21–23 сентября 2017 г. / Сыктывкар: Коми НЦ УрО РАН, 2017. – С. 34–35.

Акты внедрения в образовательный процесс

141. Акт от 19.05.2011 о внедрении материалов монографии "Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией" (авторы: Овсиюк Е.М., Редьков, В.М.) в образовательный процесс УО МГПУ им.И.П.Шамякина.

142. Акт от 19.01.2012 о внедрении материалов монографии "Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи" (авторы: Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, Г.Г. Крылов, В.М. Редьков) в образовательный процесс УО МГПУ им.И.П.Шамякина.

143. Акт от 28.02.2013 о внедрении материалов монографии "Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией" (автор: Овсиюк Е.М.) в образовательный процесс УО МГПУ им.И.П.Шамякина.

процесс УО МГПУ им.И.П.Шамякина.

144. Акт от 28.12.2018 о внедрении материалов монографии "Квантовая механика частиц со спином в магнитном поле" (авторы: Е.М. Овсюк, О.В. Веко, Я.А. Войнова, В.В. Кисель, В.М. Редьков) в образовательный процесс УО МГПУ им.И.П.Шамякина.



РЕЗЮМЕ

Овсиюк Елена Михайловна

Квантовая механика частиц с внутренней структурой во внешних электромагнитных и гравитационных полях

Ключевые слова: квантовая механика, частицы со спином, дополнительные электромагнитные характеристики, точные решения.

Цель работы: развитие теории элементарных частиц на основе использования расширенных наборов представлений группы Лоренца; построение точных решений уравнений в пространствах Лобачевского, Римана, де Ситтера с учетом внешних электромагнитных полей и дополнительных характеристик частиц: поляризуемости, аномального магнитного момента, электрического дипольного момента, электрического квадрупольного момента, структуры Дарвина – Кокса, внутреннего спектра спиновых и массовых состояний. **Методы исследования:** теория группы Лоренца и аналитическое построение решений уравнений со сложной структурой сингулярных точек.

Получены следующие результаты: построены решения уравнения для скалярной частицы с поляризуемостью в магнитном поле, решения уравнения для частицы со структурой Дарвина – Кокса в магнитном и кулоновском полях в пространствах Минковского – Лобачевского – Римана; построены решения уравнений Паули и Дирака для атома водорода и уравнения Дирака – Кэлера в моделях Лобачевского – Римана; построены решения уравнения для спинорной частицы с двумя массовыми параметрами в кулоновском поле; для частицы со спином 1 построены решения в однородных магнитном и электрическом полях; решения уравнения для частицы с поляризуемостью в магнитном поле; решения уравнения для релятивистской частицы в поле Кулона; развито геометрическое моделирование потенциального поля барьерного типа в уравнениях Максвелла, Шредингера, Дирака и Даффина – Кеммера; развито квантово-механическое описание атома водорода в статических координатах пространств де Ситтера и анти де Ситтера; развито геометрическое моделирование смешивания масс трех спинорных частиц в рамках теории фермиона с тремя массовыми параметрами.

Рекомендации по использованию и область применения: результаты могут найти применение при планировании экспериментов по измерению дополнительных характеристик элементарных частиц с различными спинами.

РЭЗІЮМЭ

Аўсіюк Алена Міхайлаўна

Квантавая механіка часціц з унутранай структурай у знешніх электрамагнітных і гравітацыйных палях

Ключавыя словы: квантавая механіка, часціцы са спінам, дадатковыя электрамагнітныя характарыстыкі, дакладныя рашэнні.

Мэта дысертацыі: развіццё тэорыі элементарных часціц з улікам дадатковых характарыстык: палярызуемасці, анамальнага магнітнага і электрычнага дыпольнага момантаў, структуры Дарвіна – Кокса, спектру спінавых і масавых станаў; пабудова рашэнняў адпаведных ураўненняў з улікам знешніх палёў.

Метады даследавання: тэорыя групы Лорэнца і аналітычная пабудова рашэнняў ураўненняў са складанай структурай сінгулярных пунктаў.

Атрыманы наступныя вынікі: пабудаваны рашэнні ўраўнення для скалярнай часціцы з палярызуемасцю ў магнітным полі, рашэнні ўраўнення для часціцы са структурай Дарвіна – Кокса ў магнітным і кулонаўскім палях у прасторах Мінкоўскага – Лабачэўскага – Рымана; пабудаваны рашэнні ўраўненняў Паўлі і Дзірака для атама вадароду і ўраўнення Дзірака – Кэлера ў мадэлях Лабачэўскага – Рымана; пабудаваны рашэнні ўраўнення для спінорнага часціцы з двума масавымі параметрамі ў кулонаўскім полі; рашэнні рэлятывісцкага ўраўнення для часціцы з анамальным магнітным момантам у аднародных магнітным і электрычным палях; рашэнні ўраўнення для часціцы з палярызуемасцю ў магнітным полі; рашэнні ўраўнення для рэлятывісцкай часціцы ў полі Кулона; развіта геаметрычнае мадэліраванне патэнцыяльнага поля бар’ернага тыпу ва ўраўненнях Максвела, Шрэдынгера, Дзірака і Дафіна – Кемера; развіта квантава-механічнае апісанне атама вадароду ў статычных каардынатах прастораў дэ Сітэра і анты дэ Сітэра; развіта геаметрычнае мадэліраванне змешвання мас трох спінорных часціц у рамках тэорыі ферміёна з трыма масавымі параметрамі.

Рэкамендацыі па выкарыстанню і вобласць прымянення: вынікі могуць знайсці ўжыванне пры планаванні эксперыментаў па вымярэнні дадатковых характарыстык элементарных часціц з рознымі спінамі.

SUMMARY

Ovsiyuk Elena Michaylovna

Quantum mechanics of the particles with intrinsic structure in external electromagnetic and gravitational fields

Key words: quantum mechanics, particles with spin, additional electromagnetic characteristics, exact solutions.

The aim of the dissertation is the developing of the theory for elementary particles with additional characteristics: polarizability, anomalous magnetic and electric quadrupole moments, the Darwin – Cox structure, spectrum of spin and mass states; the constructing of solutions of corresponding equations in presence of external fields.

Methods of investigation: the theory of the Lorentz group, analytical methods for solving differential equations with complicate structure of singular points.

In dissertation the following results have been obtained: for spin 0 particle there are constructed solutions for a particle with polarizability in the external magnetic field; and for a particle with the Darwin – Cox structure in magnetic and Coulomb fields in space model by Minkowsky, Lobachevsky, and Riemann; there are constructed solutions for Pauli and Dirac equations for hydrogen atom in Lobachevsky – Riemann spaces, and solutions for Dirac – Kähler particle in non-relativistic approximation on the background of Lobachevsky – Riemann geometries; there are found solutions for a spinor particle with two mass parameters in the presence of external Coulomb field; for a spin 1 particle there are constructed solutions of the relativistic equation for a particle with anomalous magnetic moment in presence of external uniform magnetic and electric fields; solutions for a particle with polarizability in external magnetic field; and solutions for relativistic particle in the external Coulomb field; it is developed the geometric modeling of the potential field of a barrier type for the Schrödinger, Dirac, Maxwell and Duffin – Kemmer equations; it is developed the quantum-mechanical description of the hydrogen atom in static de Sitter spaces; the geometric modeling of the mixing of the masses for spinor particles is developed in the frames of the theory of a fermion with three mass parameters.

Recommendations for the use and the field of application: results can be used when designing experiments on measuring additional characteristics of elementary particles of spin 0, 1/2, and 1.